Joachim ENGEL, Ludwigsburg

Komplexe Zahlen: Vermittler zwischen Algebra und ebener Geometrie in der Lehrerausbildung

Sollen angehende Mathematiklehrer sich in ihrer Ausbildung mit komplexen Zahlen befassen? Können komplexe Zahlen irgendeine Relevanz für die Schulmathematik beanspruchen? In der Sekundarstufe I tauchen sie nirgends auf, und in der gymnasialen Oberstufe können sie gegen die Dominanz von Analysis, analytischer Geometrie und Stochastik trotz des empfehlenswerten Schulbuchs von Cornelia Niederdrenk-Felgner (2004) nicht bestehen. Funktionentheorie bzw. komplexe Analysis als fester Bestandteil im Studium angehender Diplom-Mathematiker oder Master ist sehr anspruchsvoll. Lediglich Ingenieursstudenten lernen schon frühzeitig in ihrem Studium komplexe Zahlen als nützliches Darstellungsmittel kennen und lernen damit zu rechnen. Die Ausbildung von angehenden Lehrern legt hingegen weniger Wert auf das Einüben von Rechenroutinen als vielmehr auf die Begegnung mit Mathematik als Prozess. Da mag entschiedenes Plädoyer für komplexe Zahlen in der Ausbildung von Lehrern der Sekundarstufen 1 und 2 überraschen.

1. Mathematik als kumulative Wissenschaft

Mathematik ist eine höchst kumulative Wissenschaft, deren Erkenntnisse stark aufeinander aufbauen und zueinander bezogen sind. Mathematisches Denken ist Denken in Zusammenhängen. Das Herstellen von Querbezügen zu schon Gelerntem ist wesentlich, um neues mathematisches Wissen aufzubauen. Wenn Lernende die Verbindungen und den Zusammenhang einzelner Teilgebiete erfahren, lernen sie nicht nur besser Mathematik, sondern sie erfahren zugleich die Nützlichkeit mathematischer Ideen. Basierend auf komplexen Zahlen können in besonderer und zugleich recht elementarer Weise vielfältige Vernetzungen zwischen den beiden ältesten Teildisziplinen der Mathematik hergestellt werden: Geometrie und Algebra.

Aufbauend auf komplexen Zahlen lassen sich wichtige Zusammenhänge zwischen Geometrie, Algebra und Zahlentheorie herstellen sowie anwendungsbezogene Probleme aus Physik (z.B. Schwingungsvorgänge, Beschreibung von Bahnkurven) und Technik (z.B. Strömungslehre) elegant beschreiben. Viele klassische Probleme der Mathematik, die z.T. schon seit der Antike formuliert waren, konnten mit Hilfe komplexer Zahlen und komplexer Funktionen im 18. und 19. Jahrhundert auf elegante Weise gelöst werden. Das erste Auftreten komplexer Zahlen geht zwar bis in die Renaissance zurück, wo man vorsichtig mit komplexen Zahlen rechnete, ohne sie wirklich anzuerkennen. Auch die allgemeine Suche nach Lösungen quadratischer oder kubischer Gleichungen zu Zeiten Cardanos konnte den komplexen Zahlen keine allgemeine Anerkennung verschaffen. Bis zum Ende des 18. Jahrhunderts gelang keine exakte Begründung der Theorie der imaginären Zahlen. Jedoch die immer erfolgreicher werdenden Arbeiten mit diesen Zahlen, ihre gute Verwendbarkeit, die mögliche Darstellung in der Ebene und schließlich die Gültigkeit des Fundamentalsatzes, den man mit ihnen beweisen konnte, verhalfen zum Durchbruch. Erst allmählich wurde man im 18. Jahrhundert bereit, komplexen Zahlen - wie übrigens auch der Null und den negativen Zahlen - ein „Bürgerrecht" in der Mathematik einzuräumen (Führer, 2001).

2. Komplexe Zahlen und Algebra

Die Entwicklung der komplexen Zahlen ist auf Engste verknüpft mit der Entwicklung der Theorie zur Auflösung von algebraischen Gleichungen. Fragen der Lösbarkeit algebraischer Gleichungen haben historisch in der Entwicklung der Algebra eine zentrale Rolle gespielt. Dazu gehören sowohl die Lösungsformeln von Cardano und Ferrari für Gleichungen 3. und 4. Grades sowie die Resultate von Abel und Galois über die Nichtauflösbarkeit algebraischer Gleichungen höheren Grades. Der Fundamentalsatz der Algebra weist die komplexen Zahlen schließlich als algebraisch abgeschlossenen Körper aus. Eine Beschäftigung mit komplexen Zahlen und Abbildungen der komplexen Zahlenebene ist auch für angehende Lehrerinnen und Lehrer bedeutsam: Über den Tellerrand der bisherigen Zahlbereiche hinauszuschauen hilft, ein tieferes Verständnis der bisher vertrauten Zahlen zu erwerben und die Notwendigkeit von Zahlbereichserweiterungen zu verstehen. Jenseits der reellen Zahlen besitzen plötzlich auch Gleichungen der Form $x^2 + 1 = 0$ Lösungen. Bei der Suche nach Lösungen von Gleichungen 2., 3. oder 4. Grades finden altbekannte Rechenmethoden wie das quadratische Ergänzen oder Koeffizientenvergleiche neue Anwendung. Über die Euler-Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ verlieren jetzt viele transzendente Funktionen wie die Logarithmusfunktion, trigonometrische Funktionen etc. die Begrenztheit ihres Definitionsbereiches und sind für alle Werte der Gaußschen Zahlenebene definiert.

3. Komplexe Zahlen und Geometrie

Komplexe Zahlen erweisen sich als hervorragend geeignete Darstellungsmittel zur Algebraisierung von Fragen der ebenen Geometrie. Im Gegensatz zur Vektorgeometrie beschränkt sich ein auf komplexen Zahlen basierter Zugang zur Geometrie nicht nur auf lineare geometrische Objekte, sondern öffnet uns die mathematische wie ästhetische Vielfalt gekrümmter Objekte wie z.B. Ellipsen, Hyperbeln, Spiralen und vieles andere mehr. Auch ein kleiner Ausflug in die Welt der Fraktale ist mit Hilfe komplexer Zahlen möglich.

Erst Anfang des 19. Jahrhunderts wurden die Zweifel eines Cardano, Descartes, Leibniz oder Newton, ob die komplexen Zahlen wirklich existierten, endgültig beiseite geschoben. Sie funktionierten nicht nur gut, man erkannte dass man sie auch als geometrische „Größen'" veranschaulichen kann, nämlich sowohl als Vektoren in der Ebene wie auch als Drehstreckungen.

Die Multiplikation mit einer komplexen Zahl a bewirkt eine Drehstreckung in der komplexen Ebene, und jede ganze lineare Funktion der komplexen Ebene $w = az + b = a(z - z_0) + z_0$ kann als Drehstreckung mit Streckfaktor r, Drehwinkel φ und Zentrum z_0 angesehen werden, wobei $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, siehe Abbildung 1. Diese Feststellung liefert einen direkten Zugang zur Abbildungs- und Ähnlichkeitsgeometrie.

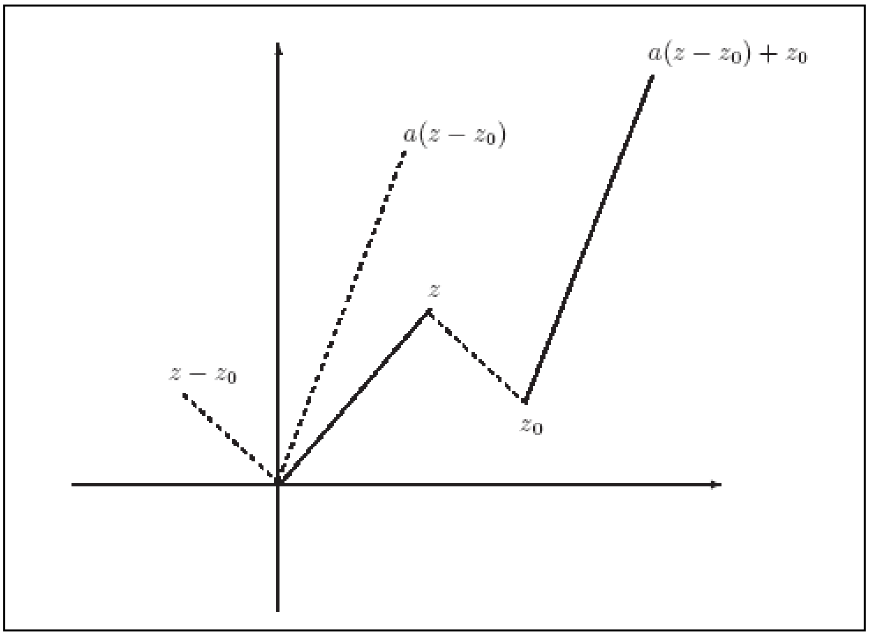

Abb. 1: *Ganze lineare Funktion in der Gaußschen Ebene kann als Drehstreckung gedeutet werden.*

Aus den reichhaltigen Möglichkeiten, Punktmengen in der Gaußschen Zahlenebene mit Hilfe komplexer Zahlen darzustellen, mögen folgende Beispiele hier exemplarische Erwähnung finden:

- Man betrachte die Ortlinie der Menge aller Punkte, deren Summe/ Differenz/ Quotient/ Produkt zu zwei gegebenen Punkten, z.B. +1 und -1, festen Abstand d haben:
  - Summenkonstanz $|z-1| + |z+1| = d$ *Ellipse*
  - Differenzenkonstanz: $|z-1| - |z+1| = d$ *Hyperbel*
  - Quotientenkonstanz: $|z-1| / |z+1| = d$ *Apollonius-Kreis*
  - Produktkonstanz $|z-1| \cdot |z+1| = d$ *Cassinische Kurven*

- Spiralen haben die Menschen schon immer fasziniert. Sie sind außerordentlich beeindruckende und ästhetisch attraktive Gebilde, für die sich die Menschheit zu allen Zeiten interessiert hat. Als parametrisierte Kurven in der Gaußschen Ebene lassen sich Spiralen einfach ausdrücken mittels der Gleichung

  $$z(t)=f(t)e^{it},$$

wobei die Funktion f den Typus der Sprirale näher charakterisiert:

- $f(t)=at$ *Archimedische Spirale*
- $f(t)= e^{at}$ *logarithmische Spirale* (Spiralis mirabislis)
- $f(t) = a/t$ *hyperbolische Spirale*

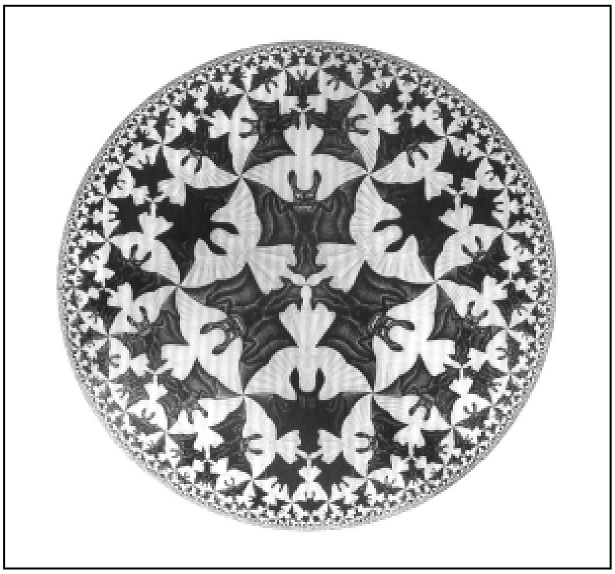

Abb. 2: „Engel und Teufel“ von M.C. Escher

- Inversionen oder Spiegelungen am Kreis sind ästhetisch sehr reizvoll, und bilden z.B. die Grundlagen für Kreisfraktale, wie sie bei Bildern der niederländischen Künstlers M.C. Eschers (Abbildung 2) zu sehen sind. Geometrisch über Konstruktionen am Thaleskreis lassen sich Spiegelungen am Kreis mit Hilfe komplexer Zahlen wie folgt ausdrücken:

$$z=|z|e^{i\varphi} \rightarrow z'= 1/|z|\, e^{i\varphi}$$

Literatur:

Engel, J. (2009): *Komplexe Zahlen und ebene Geometrie*. Oldenbourg: München.

Führer, L. (2001): Kubische Gleichungen und die widerwillige Entdeckung der komplexen Zahlen. *Praxis der Mathematik* 2/43, 57_67.

Niederdrenk-Felgner, C.: (2004): *Komplexe Zahlen*. Klett: Stuttgart.