Jürgen FLACHSMEYER, Greifswald

Orimathe: Zum Zusammenwirken von Origami und Mathematik

2008 — im vergangenen Jahr der Mathematik – wurden allgemein vielseitige Aktivitäten entfaltet, um die öffentliche Akzeptanz der Mathematik zu befördern und insbesondere bei mehr Jugendlichen Interesse dafür zu erwecken. Das findet im Europäischen Jahr der Kreativität 2009 seine Fortsetzung. Mittels einer gestarteten ***Orimathe-Initiative*** soll das anhand der japanischen Papierfaltkunst Origami erschlossen werden. Durch den handwerklichen Umgang mit form- und farbschönen Faltgebilden gelangt man in natürlicher Weise zum mathematischen Nachdenken und Verstehen. Dem verstandesmäßigen Begreifen geht das tatsächliche Begreifen von unter den eigenen Händen entstehenden, aus Papier gefalteten Objekten voraus. Das Lern- und Lehrverhalten im Mathematikunterricht lässt sich solcherart konsequent bereichern. Der Autor hat dazu verschiedene Schritte unternommen, die seit mehreren Jahren auch Schüler in direkter Begegnung betreffen. Zunächst kamen im Rahmen der Greifswalder Kinder-Universitäten die von sich aus interessierten Schüler. Seit dem letzten Jahr geht der Autor auch in reguläre Klassenverbände, um beim aktuellen Schulstoff für Orimathe zu wirken. Wesentliche Impulse erhielt diese Initiative durch eine Origami-Ausstellung in Greifswald, die vom Institut für Mathematik und Informatik der Universität in Kooperation mit der Universitätsbibliothek durchgeführt und von dem Autor mit dem Greifswalder Falterstammtisch sowie dem Berliner Faltertalent Helmut Gembitzki gestaltet wurde. 3000 Besucher nahmen sie in Augenschein und 270 erprobten sich unter Anleitung in 7 begleitenden Workshops in der Kunst des Origami. 33 Poster zeigten den Betrachtern Brücken zur Mathematik auf. Auch zur Bearbeitung ungelöster Fragen fanden sich darauf Hinweise.

Orimathe ist ein Kunstwort, das aus der Zusammenziehung von Origami und Mathematik gebildet wurde.

Ein Teil der Greifswalder Exponate stand in Oldenburg zur Verfügung, sie konnten allerdings nur 1 ½ Tage gezeigt werden. Ein ausgegebenes Begleitheft von 48 Seiten beinhaltete die Greifswalder Poster und zudem zwei konkrete Beispiele zur schulischen Behandlung. Die erste Darlegung „*Ein gefaltetes Schiff als Beispiel zur Bruchrechnung und zur Ähnlichkeit*" war unter anderem Gegenstand des Oldenburger Vortrages. Dieser umfasste noch mathematische Darlegungen an der Windmühlenfaltung, einem daraus hervorgebrachten Tiergesicht, einem einfachen Fuginsekt und einer gefalteten Möve.

Das Hauptanliegen zielte darauf ab, zur vielseitigen Mitarbeit aufzurufen, ein umfangreiches Programm zur schulischen Umsetzung von Orimathe anzubahnen. In jeder Klassenstufe bieten sich dafür mannigfache Gelegenheiten. Es betrifft nicht nur die direkt in der Geometrie beheimateten Stoffgebiete. Durch eine Unterbauung mittels Origami macht man vieles weitestgehend sichtbar, was man denkt! Hier folgen zwei Beispiele.

1. Origami-Objekte: Schwimmender Schwan bzw. hockender Vogel

(Für die 1. Klasse geeignet). In ein quadratisches Blatt Faltpapier wird eine *Diagonale* eingefaltet, indem man eine beliebig ausgewählte Ecke des Quadrates auf die Gegenecke bringt und die sich ergebende Papierwölbung glatt streicht. Dabei muss man beachten, dass die Quadratkanten passend aufeinander kommen. Es empfiehlt sich beim Origami die Sprechweise *Kante* anstelle von Seite für die Begrenzungslinien, weil Seite für die Ober- und Unterseite des Blattes benutzt werden. Schüler der 1. Klasse weisen im korrekten Befolgen der Faltanweisungen (Sorgfalt) große Unterschiede auf! Aber mehrmaliges Wiederholen der vorzunehmenden Faltungen führt zum baldigen Erfolg. Dabei lässt man die Schüler die Anweisungen für die anderen Mitschüler in ganzen Sätzen sagen (Sprachkultur). Die Anzahlen der Ecken und auch der Kanten eines Quadratblattes werden allgemein richtig erfasst. (Nur einmal hieß es in einer 4-ten Klasse, dass ein Quadrat 6 Ecken hätte, was aber durch nochmalige Aufforderung dann richtig nachgezählt wurde. Sind ihm da die 6 Seitenflächen eines Würfels (der auch behandelt worden war) in die Quere geraten? Beim wieder geöffneten Blatt werden dann von einer Ecke, durch die die eingefaltete Diagonale verläuft, die Kanten auf die Diagonale gefaltet. (Anmerkung: Man hat damit jeweils die beiden 45°-Winkel zwischen Diagonale und einmündender Kante halbiert). Es entsteht ein *Drachen* (Schüler schlagen selber Benennungen für erreichte Zwischenresultate bzw. Endresultate vor, die man manchmal jedoch in gebräuchliche Benennungen umzubilden hat). Jetzt wird der *Drachenkopf* mit der Kopfecke so auf die *lange Diagonale* des Drachens gefaltet, dass die Faltlinie die *kurze Diagonale* des Drachens wird. Den übergekippten Drachenkopf kippt man längs der Basislinie des Kopfes zur anderen Seite des Blattes, so dass der Drachenkopf auf dem ungeschlitzten gleichschenkligen Dreieck liegt. Die beiden Ecken der kongruenten Schenkel faltet man auf den Eckpunkt des Drachenkopfes. Das zusammengefaltete Blatt hat wieder die Kontur eines Drachens mit einem *Schwanzwinkel* von 45° und einem *Kopfwinkel* von 90°. Solche Drachen mit diesen Winkeln treten beim Origami häufig als Zwischenstufen auf. Jetzt faltet man den Drachen längs seiner langen Diagonale zusammen und zieht das Gebilde am aufliegenden Drachenkopf in die in der Abbildung angegebene Form auf. Das Objekt kann man in zweierlei Weise aufstellen. Die natürliche Spreizung der Faltteile sichert einen stabilen Stand. Das links gezeigte Gebilde wird der schwimmende Schwan, wenn man am Hals eine Gegenbruchfaltung anbringt, die den Schnabel liefert. Der Schnabel kann mit der Höhe nach eigenem Dafürhalten angesetzt werden. Das rechts stehende Gebilde wird durch Faltung einer Winkelhalbierenden zu einem hockenden Vogel, dessen Schnabel nach rechts weist. Ohne die letzten Faltungen vorgenommen zu haben, entfaltet man das Gebilde und erkennt das durch die

Faltlinien hervorgebrachte Faltmuster im Quadratblatt. Darin sind durch Grautönungen Teilfiguren hervorgehoben.

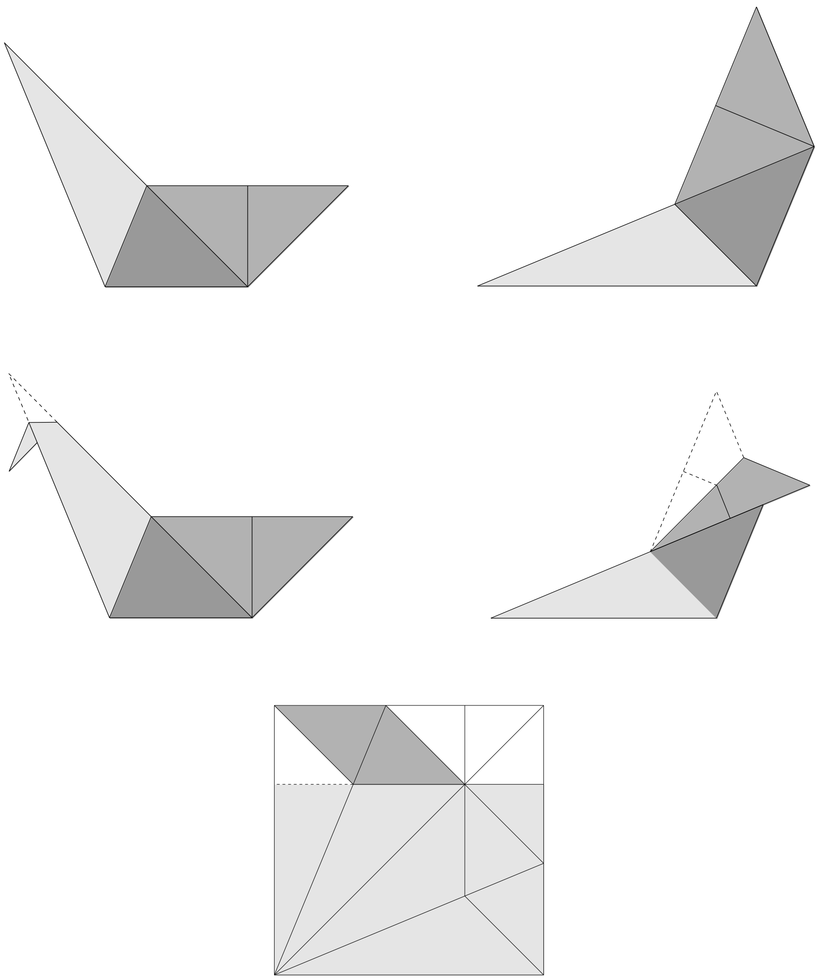

Abb. Die Faltgebilde in seitlicher Ansicht und das Faltmuster mit Hervorhebung von Teilfiguren

Hintergrundwissen des Lehrers: Folgende elementare Teilfiguren sind im Faltmuster zu bemerken: 1) Kongruente gleichschenklige rechtwinklige Dreiecke. 2) Kongruente gleichschenklige Dreiecke mit den Winkeln von 45° und 67.5°. 3) Kongruente Dreiecke mit den Winkeln von 22.5°, 45°, 112.5°.

Zwei aneinander grenzende Dreiecke des letzten Typs bilden zusammen einen Drachen mit Schwanzwinkel von 45° und Kopfwinkel von 90° oder aber ein Vogelviereck. Zwei aneinander grenzende Dreiecke des mittleren Typs bilden eine Raute. Ein Vogelviereck und eine angrenzende Raute ergeben einen Drachen mit einem Schwanzwinkel von 45° und einen Kopfwinkel von 135°.

Anmerkung: Die Schüler entwickelten leicht ein intuitives Verständnis für die Kongruenz (Deckungsgleichheit) und für die genannten Figurentypen, ohne dass alle auftretenden Winkelwerte einbezogen wurden. Jedoch herrschte rasch eine Vorstellung für rechte Winkel und die Halbierung von Winkeln mittels Faltung.

2. Origami-Objekte: Quadratische Pyramide und pyramidale Schale

(Für die 10. Klasse geeignet). In ein quadratisches Blatt werden die beiden Diagonalen und die beiden kantenparallelen Mittellinien eingefaltet und das wieder geöffnete Blatt zum Quadrat der viertel Größe zusammen geschoben. Von der offenen Ecke halbiert man jeweils für die Doppellage von links und rechts den 45°-Winkel an der Quadratdiagonale auf der Vorder- und Rückseite. Es entsteht ein mehrfach liegender Drachen mit Kopfwinkel von 90° und Schwanzwinkel von 45°. Den Drachenkopf kippt man an der kurzen Drachendiagonale über und zieht die Faltkante besonders scharf. Nachdem der Kopf wieder zurückgeführt wurde, richtet man reihum jedes rechtwinklige Dreieck mit einem 22.5°-Winkel auf und drückt das aufgespreizte Dreieck zu einem Drachen nieder. Daraus kann man jetzt die Pyramide formen, wobei sich der quadratische Boden der Pyramide aus dem anfänglichen Drachenkopf ergibt. Die Seitendreiecke sind gleichschenklige Dreiecke mit einem Topwinkel von 45°. Für die pyramidale Schale faltet man die bei der Pyramide nach innen gelangten Halbierungsdreiecke der Seitendreiecke nach außen und kippt sie nach unten und um den Boden herum. Es entsteht ein Pyramidenstumpf.

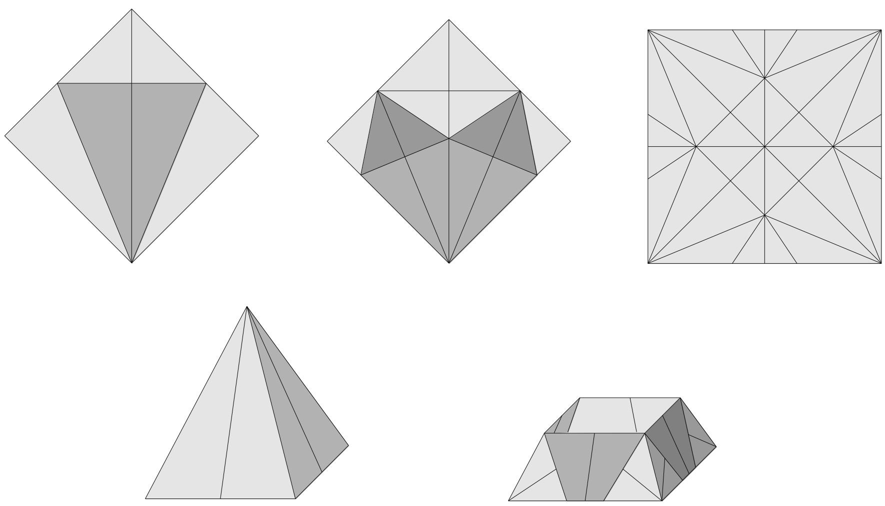

Abb. Die Faltschritte, das Faltmuster und die Pyramide sowie die Schale

Wenn man die Kantenlänge des Ausgangsblattes als 1 nimmt, so wird die Kantenlänge der Grundfläche der Pyramide $\tan \pi/8 = \sqrt{2} - 1$, die Pyramidenhöhe wird $\frac{1}{2}\sqrt{1 - (\tan \pi/8)^2} = \sqrt{1/2 \tan \pi/8}$. Die Länge der schrägen Kanten des Pyramidenstumpfes beträgt die Hälfte der Länge der Grundflächenkante.

Literatur

Flachsmeyer, J. (2008) Origami und Mathematik. Papier falten – Formen gestalten. Berliner Studienreihe zur Mathematik, Band 20, Heldermann Verlag