Albert GÄCHTER, St.Gallen

Der Albtraum eines Mathematikers – und seine Folgen

Zu den faszinierendsten Problemen der Mathematik gehören jene, welche einfach zu formulieren, aber schwierig zu lösen sind. Ein berühmtes Beispiel dieser Art ist das Collatz-Problem. Seit bald 80 Jahren fordert es die Mathematiker heraus. Immer noch ungelöst, enthüllt es aber nach und nach einige seiner Geheimnisse. Leider hat das Problem kaum Eingang in die Schulmathematik gefunden, obwohl es als schönes Lehrstück dafür gelten kann, wie in der Küche der Mathematik gearbeitet wird. Zudem bietet es für Fach- und Abiturarbeiten ein ergiebiges Arbeitsfeld.

Es ist ein weit verbreiteter Irrtum, dass sich Schulmathematik nur mit gesicherten mathematischen Erkenntnissen beschäftigen soll. Den Schülerinnen und Schülern entgeht so der Einblick in die Entstehung einer Theorie. Auch vorläufiges und unvollständiges Wissen über ein Teilgebiet der Mathematik kann wertvoll sein. Die Vorstellung, dass in Themen der Schulmathematik bereits alles gesagt und nichts mehr zu forschen ist, fördert den rein rezeptiven Umgang mit diesem Fach. Es wäre wünschenswert, dass am Gymnasium eine echte Auseinandersetzung mit Methoden und Inhalten bedeutsamer Mathematik erfolgen kann.

Der Albtraum

Die Mathematikerin und Poetin JoAnne Growney aus den USA schrieb vor einigen Jahren das Büchlein «My Dance is Mathematics». Es enthält eine Sammlung mathematischer Gedichte, darunter auch das folgende:

Mathematician's Nightmare (nightmare = Albtraum)

Suppose a general store,
items with unknown values
and arbitrary prices
rounded for ease to
whole-dollar amounts.

Each day Madame X,
keeper of the emporium,
raises or lowers each price,
exceptional bargains
and anti-bargains.

Even-numbered prices
divide by two,
while odd ones climb

by half themselves
then half a dollar more
to keep the numbers whole.

Today I pause before
a handsome beveled mirror
priced at twenty-seven dollars.
Shall I buy or wait
for fifty-nine days
until the price is lower?

Ein wirklich ungewöhnlicher Laden, den Madame X hier führt. Einerseits gibt es nur Preise in ganzen Dollars. Andererseits erfahren die Preise jeden Tag eine Änderung. Geradzahlige Artikelpreise werden am nächsten Tag halbiert, ungeradzahlige um die Hälfte erhöht und mit einem halben Dollar zusätzlich aufgestockt. Lohnt es sich, für den Kauf eines 27 Dollar teuren Spiegels 59 Tage zu warten?

Im Folgenden müssen leider aus Platzmangel wenige Stichworte zu den Strategien genügen.

Strategie 1: Mache einige (gut gewählte) Beispiele!

Beispiele sind kleine mathematische Experimente. Sie helfen mit, das Problem besser zu verstehen und allfällige Besonderheiten aufzuspüren.

Startzahl 20: 20, 10, 5, 8, 4, 2, 1
Startzahl 27: 27, 41, 62, 31, 47, 71, 107, 161, …

Strategie 2: Mathematisiere und verwende passende Werkzeuge!

Unter Mathematisierung versteht man die Umsetzung eines in der Umgangsprache formulierten Problems in die mathematische Fachsprache. Werkzeuge bestimmen stets den Problemlösevorgang mit und sind deshalb sehr sorgfältig auszulesen.

$$T: \mathbb{N} \to \mathbb{N}:$$

$$T(n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{falls } n \text{ gerade} \quad \text{(fallender Schritt)} \\ \frac{3n+1}{2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \quad \text{(wachsender Schritt)} \end{cases}$$

Als Werkzeuge eignet sich eine Tabellenkalkulation oder ein Computer-Algebra-System. $T^{59}(27) = 23$. Nach 59 Tagen liegt der Preis erstmals unter

27 Dollar. Wartet man noch weitere 11 Tage, erwirbt man den Spiegel zum Schnäppchenpreis von 1 Dollar!

Strategie 3: Suche geeignete Informationen!

Die gezielte Suche nach einschlägigen Informationen zum Thema führt in Bibliotheken und ins Internet. Wichtig bei der Recherche ist, die richtigen Fragen in verschiedenen Sprachen zu stellen.

Die Geschichte der Collatz-Folgen ist einzigartig in der Mathematik und bildet auch ein Lehrstück für das Problemlösen.

> **Collatz-Vermutung**:
>
> Für jede natürliche Zahl n gibt es ein k mit $T^k(n) = 1$.

Strategie 4: Löse Teilprobleme und reichere an!

Teilprobleme bereiten mit ihren Lösungen den Boden für eine spätere Lösung des ganzen Problems. Je mehr Eigenschaften bekannt sind und je vielfältiger sich das Verhalten der beteiligten Funktionen zeigt, desto klarer heben sich die Konturen für eine Lösung der Problemstellung ab. Das Ziel ist also die Erzeugung eines reichhaltigen Umfeldes.

Neue Begriffe: Bahnlänge, Spitzenwert, stopping time usw.

Neue Sätze: Zerlegungssatz, Zyklensatz usw.

Strategie 5: Visualisiere – und nochmals: visualisiere!

Der Wert der Visualisierung für neue Ideenbildung ist unbestritten. Eine einseitige Berücksichtigung der Eingangskanäle unserer Sinne schmälert die Erfolgsaussichten.

Vielfältige Darstellungsmöglichkeiten (auch Vertonung der Folge).

Strategie 6: Bearbeite das Umkehrproblem!

Oft lässt sich ein Problem einfacher von hinten nach vorne lösen. Ausgehend vom Endzustand wird der Anfangszustand rekonstruiert.

Wie kommt man im Collatz-Baum zum vorhergehenden Element?

Strategie 7: Rechne auch mit Wahrscheinlichkeiten!

Auf dem Weg zu einer Problemlösung oder zu einem Beweis sind Wahrscheinlichkeitsüberlegungen oft sehr nützlich. Eigenschaften können einer statistischen Analyse unterworfen werden, um Voraussagen zu machen.

Wahrscheinlichkeit für den Wachstumsfaktor der Folge usw.

Strategie 8: Suche aequivalente Problemstellungen!

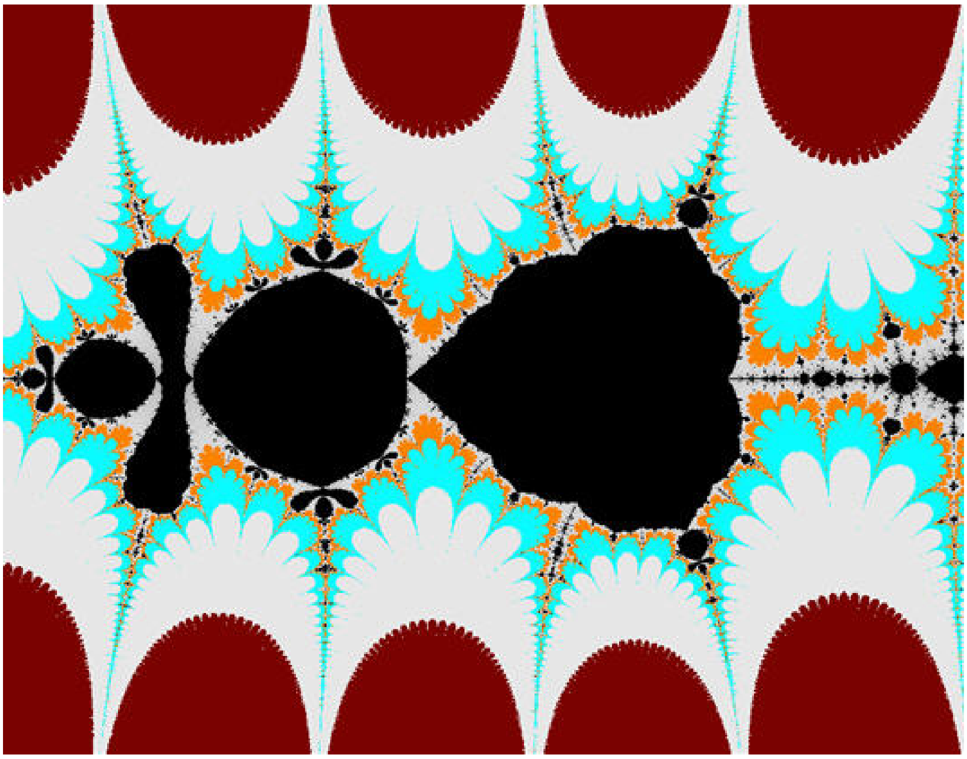
Mit dieser fruchtbaren Strategie transformiert man ein Problem in ein aequivalentes Problem in einem andersartigen mathematischen Gebiet und versucht, es dort zu lösen. Man holt gewissermassen das Problem in ein «Gärtchen», wo man sich besser auskennt und wo andere Werkzeuge verfügbar sind.

→ holomorphe Funktionen, Automaten (Turing, zelluläre Automaten, Tag)

Strategie 9: Verallgemeinere!

Es gibt Probleme, welche sich in einem grösseren Zusammenhang leichter lösen lassen. Das «Abgrasen» der Umgebung kann neue Ideen und Einsichten zur Folge haben. Oft führen analoge Fragestellungen zu ganz unterschiedlichen Resultaten.

Ausdehnung der Vorschrift auf ganze, reelle und komplexe Zahlen!



Strategie 10: Variiere hemmungslos!

Variatio delectat, sagt der Lateiner. Neben der Freude steht beim Variieren auch der Verständnisgewinn im Vordergrund.

Betrachtung von andern Zuordnungsvorschriften für T(n).