Boris GIRNAT, Münster

Geometrische Weltbilder in der Sekundarstufe I – Eine Klassifikation aus Lehrersicht

Seit einigen Jahren hat der Beliefs-Begriff Einzug in die Lehrerforschung gefunden und wird im deutschen Sprachgebiet häufig mit dem Ausdruck „Weltbilder" in Verbindung gebracht, den Törner und Grigutsch (1994) geprägt haben. Die Beliefs-Forschung geht davon aus, dass *grundlegende und überdauernde Lehrereinstellungen* einen wichtigen Einfluss auf das Lehren und Lernen von Mathematik haben, und sieht ihr Ziel darin, solche Einstellungen explizit zu machen (Wilson und Cooney 2002).

An dieser Stelle wird eine Klassifikation von Weltbildern vorgestellt, die den bewusst offen gehaltenen Begriff der Beliefs für den Fall der Sekundarstufengeometrie präzisieren soll. Als erste empirische Anwendung wird dargestellt, wie diese Klassifikation bei der Rekonstruktion individueller Lehrercurricula (zu diesem Begriff Eichler 2006) benutzt worden ist. Eine besonders interessante Ausprägung wird dabei inhaltlich näher vorgestellt.

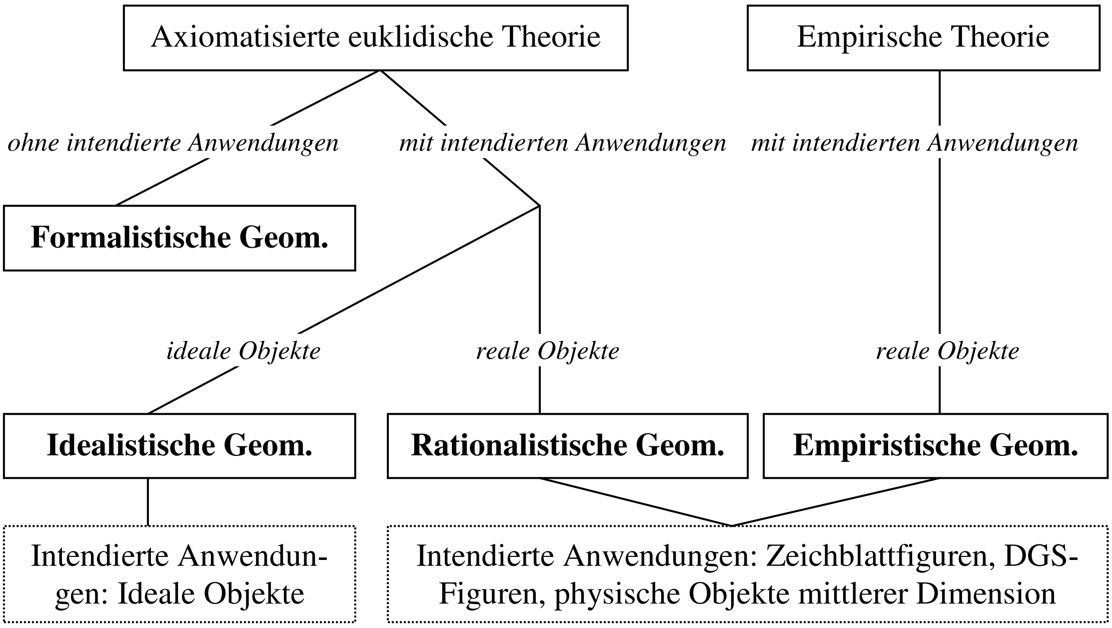
Unsere Klassifikation greift zwei Ideen auf, die bislang vor allem zur Untersuchung von Schülervorstellungen benutzt worden sind: Houdement und Kuzniak (2001) entwickelten die Theorie der geometrischen Arbeitsbereiche, um zu untersuchen, ob Schüler geometrische Probleme *deduktiv-beweisend* oder *experimentell-messend* bearbeiten. Struve (1990) und Andelfinger (1988) konzentrierten sich vor allem auf die Frage, welche *Gegenstandsauffassung* Schüler entwickeln: Verstehen sie geometrische Objekte eher als abstrakte, ideale Gebilde oder eher als empirische Objekte der realen, physischen Welt? Sie kommen zu dem Ergebnis, dass eine empirische Auffassung vorherrsche und sich unterrichtliche Schwierigkeiten oder Rahmungsdifferenzen vor allem dadurch ergäben, dass Lehrer weitgehend eine idealistische Sicht einnähmen und sie früher oder später auch bei ihren Schülern als selbstverständlich voraussetzten, während die Schüler tatsächlich größtenteils in einer empirischen Denkweise verharrten. Beide Studien gehen davon aus, dass unter Lehrern eine idealistische Sichtweise weitgehend selbstverständlich sei (vgl. Andelfinger 1988, S. 108).

Wir greifen die beiden zentralen Ideen der genannten Studien auf – nämlich die *Gegenstandsauffassung* und den *Begründungskontext* – und entwickeln daraus eine Klassifikation, ohne uns zunächst von Vermutungen über ihre empirische Verbreitung unter Lehrern leiten zu lassen. Wir verwenden die sogenannte strukturalistische Wissenschaftstheorie (Stegmüller 1985), um diese Ideen systematisch in einen ausgearbeiteten theoretischen Rahmen einzuordnen, den teilweise auch Struve (1990) benutzt hat.

Dem wissenschaftstheoretischen Strukturalismus zufolge lässt sich jede mehr oder weniger wissenschaftliche Theorie durch zwei Bestandteile charakterisieren, nämlich durch ihre Menge *intendierter Anwendungen* und durch ihre *grundlegenden theoretischen Annahmen* – im Grenzfall höchster Präzision durch ein minimales, vollständiges Axiomensystem, wie es für die Elementargeometrie in verschiedenen Axiomatisierungen der euklidischen Geometrie zur Verfügung steht. Nimmt man eine euklidische Hintergrundtheorie als gegeben an, so gibt es mehrere Möglichkeiten, diese Theorie zu interpretieren, d. h. ihre intendierten Anwendungen festzulegen: Man kann auf Anwendungen verzichten und einen *formalistischen* Standpunkt einnehmen; man kann sie auf *idealistischer* Weise deuten und ideale Objekte als Gegenstand der Geometrie annehmen, welche die euklidischen Axiome ohne Näherung erfüllen, aber nicht physisch existieren; oder man kann als Gegenstand der Geometrie reale, physische Objekte betrachten, auf die sich die euklidische Hintergrundtheorie, ähnlich wie die meisten Naturwissenschaften, nur mit einer gewissen Näherung bezieht.

Eine euklidische Hintergrundtheorie als gegeben anzunehmen, versperrt den Zugang zu einem Fall, der sich gerade bei Schülerstudien als besonders interessant herausgestellt hat. Dies ist der Fall, bei dem keine euklidische Theorie vorab vorliegt, sondern eine geometrische Theorie sich erst im experimentellen Umgang mit räumlichen Objekten ergibt. Aus dem Grund führen wir auch auf der Ebene der grundlegenden theoretischen Annahmen eine Unterscheidung ein, indem wir einmal von einer axiomatisch-euklidischen Geometrie und einmal von einer (inhaltlich wie auch immer gearteten) empirischen Geometrie ausgehen. Im empirischen Fall ist es klar, dass sie sich weder bloß auf ideale Objekte beziehen, noch als eine rein formale Theorie interpretiert werden kann, d. h. ihre intendierten Anwendungen sind wegen ihres experimentell-empirischen Charakters von vornherein auf reale, physische Objekte festgelegt.

Damit treten reale Objekte zweimal als intendierte Anwendungen auf, nämlich einmal im Rahmen einer axiomatisch-euklidischen Theorie und einmal in Verbindung mit einer empirischen. Wir nennen den ersten Fall eine *rationalistische* Geometrie, den zweiten eine *empiristische*, um im Einklang mit erkenntnistheoretischen Positionen des 17. und 18. Jahrhunderts zu betonen, dass im rationalistischen Fall die Theorie unumstößlich als vorab gegeben angesehen und „bloß“ angewandt wird, ohne dass reale Anwendungen die Theorie bestätigen oder falsifizieren könnten, während der empiristische Fall die gegenteilige Annahme macht: Die Theorie wird aus der Erfahrung „entwickelt“ und hat sich experimentell an ihr zu bewähren. Die folgende Grafik gibt eine Übersicht über unsere Klassifikation:



Unsere Klassifikation wird gegenwärtig dazu genutzt, in einer Interviewstudie die individuellen Geometriecurricula von neun Sekundarstufenlehrern zu interpretieren. Dabei lassen sich drei Idealisten und jeweils zwei Formalisten, Rationalisten und Empiristen erkennen, was vor dem Hintergrund von Andelfinger (1988) eine überraschende Bandbreite ist. Auswirkungen des geometrischen Weltbildes lassen sich bei Formalisten, Idealisten und Rationalisten erst nachweisen, wenn Themen wie Anwendungen, Medien, Konstruktionen oder das Problemlösen angesprochen werden. Bei der Begriffsbildung und Erkenntnissicherung sind kaum Unterschiede zu erkennen – was unsere These stützt, dass ihnen zwar verschiedene Gegenstandsauffassungen, aber ein gemeinsames Theorieverständnis zugrunde liegt. Diese drei Richtungen werden hier nicht weiter verfolgt. Es wird vielmehr anhand einer Fallstudie dargestellt, wie sich eine empiristische Sicht auf den entscheidenden Unterschied zu den anderen drei Richtungen auswirkt, nämlich auf das *Theorieverständnis*, also die Art, wie *Begriffe* und *Begründungen* in einer empiristischen Geometrie „aus der Erfahrung" gewonnen werden. Wir zitieren zunächst vier Interviewepisoden:

> Ich verwende gern Zerlegungsbeweise, dass sie [die Schüler] auch irgendwo etwas anfassen können – Mathematik mit allen Sinnen –, dass man also Figuren zerschneidet, zusammenlegt, guckt, was dann passt. […] Wir arbeiten hier mit Euklid, und damit lässt sich auch schon vieles schön veranschaulichen – vor allem dadurch, dass man dadurch auch Beweise führen kann, zum Beispiel Satz des Thales, dass man eben sagt, so, wir bewegen jetzt mal den dritten Punkt dieses Dreiecks auf dem Kreisbogen und gucken uns den Winkel an und stellen eben fest, der ist immer 90°, und nehmen das dann als Beweis. […] Dass man sich π annähert, indem man Umfänge von Kreisen misst, das hatte mein Mathefachleiter auch mal gemacht, hat verschiedene kreisförmige Gegenstände mitge-

> bracht. Dann sollten die ausgemessen werden und dann geguckt werden, gibt es da irgendeinen Zusammenhang zwischen dem Umfang und dem Radius, was ich auch für eine bessere Näherung halte, als wenn man sagt, wir gehen jetzt über vom Viereck zum Fünfeck, zum Sechseck, zum Siebeneck;; und das daran darüber das π entsteht. Es ist auch die Frage, ob das dann unbedingt sinnvoll ist, denn wichtig für die Schüler ist es ja später, dass sie Sachen lösen können. Das muss jetzt nicht unbedingt exakt sein, sondern dass die entsprechende Nachkommastelle noch genau ist je nach der Anwendungssituation, π oder Wurzel 2, so genau kann ich ja nicht mehr messen.

Diese Auszüge deuten auf mehreres hin: 1)Begriffe werden operational, ostensiv oder durch Rückgriff auf die Alltagssprache eingeführt, was insbesondere Bewegungs- und Passungsbegriffe einschließt; 2) mathematische Konstanten werden wie Naturkonstanten messend ermittelt, infinitesimale Approximation wird durch Näherungs- und Mittelungsverfahren ersetzt; 3) Beweise haben keinen deduktiven Charakter, sondern erscheinen als empirische Prüfung relativ isolierter Hypothesen und haben Ähnlichkeiten mit der naturwissenschaftlichen Methode des gesteuerten, wiederholbaren Experimentes; 4) Standards der Exaktheit ergeben sich nicht aus mathematischen Gründen, sondern aus Anforderungen eines realen Kontextes und der Messgenauigkeit; 5) eine „Aufgabenorientierung“ scheint erkennbar.

Abschließend kann nur angedeutet werden, dass die hier befragten empiristischen Lehrer auch bei „allgemeineren“ Kompetenzen wie dem Problemlösen, Modellieren, Konstruieren und Argumentieren von den anderen drei Richtungen abweichen – vermutlich weil ein empiristisches Geometriebild manche Voraussetzungen dieser Bereiche vernachlässigt. Inwiefern aber unsere ersten empirischen Ergebnisse verallgemeinerungsfähig sind und wie sich unsere vier Klassen prozentual verteilen, könnte allerdings erst eine umfassendere, repräsentative Studie zeigen.

Literatur

Andelfinger, B. (1988): *Geometrie: Didaktischer Informationsdienst Mathematik*. Soest: Soester Verlagskontor.

Eichler, A. (2006): Individual Curricula – Beliefs behind Beliefs. In A. Rossman & B. Chance (Hrsg.): *ICOTS-7 Conference Proceedings*. Salvador: IASE, CD-ROM.

Houdement, C., & Kuzniak, A. (2001): Elementary Geometry Split into Different Geometrical Paradigms. *Proceedings of CERME 3*, Bellaria, Italy (Web).

Stegmüller, W. (1985): Theorie und Erfahrung: Theorienstrukturen und Theoriendynamik. Band 2(2), *Probleme und Resultate der Wissenschaftstheorie und analytischen Philosophie* (2. Aufl.). Berlin, Heidelberg, New York: Springer Verlag.

Struve, H. (1990): *Grundlagen einer Geometriedidaktik*. Mannheim, Wien, Zürich: BI Wissenschaftlicher Verlag.

Törner, G., & Grigutsch, S. (1994): „Mathematische Weltbilder“ bei Studienanfängern – eine Erhebung. *Journal für Mathematik-Didaktik*,15 3/4, 211–251.