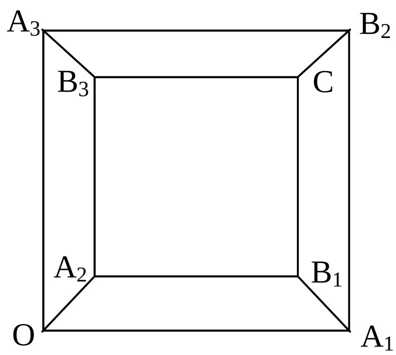
Günter GRAUMANN, Bielefeld

Der vierdimensionale Würfel -ein Bindeglied zwischen anschaulicher und mehrdimensionaler Geometrie

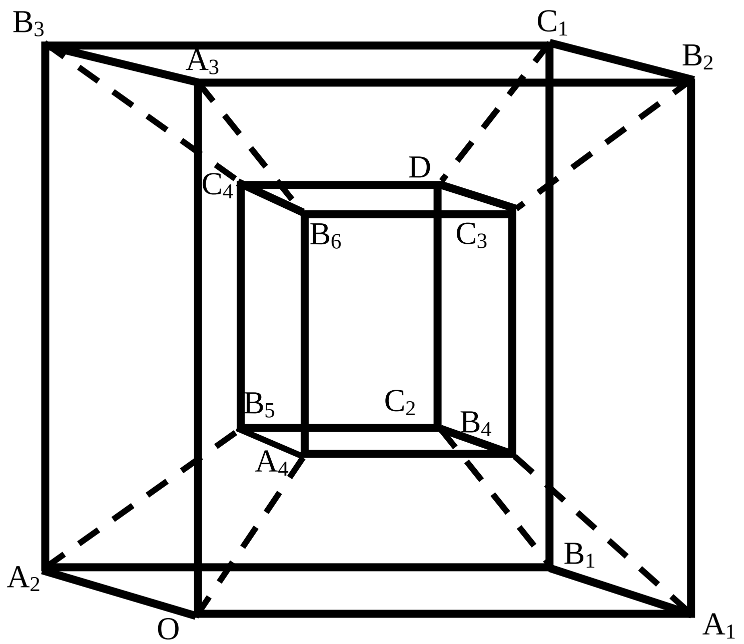
Bekanntlich kann der vierdimensionale Würfel als Projektion im dreidimensionalen Raum konkret veranschaulicht werden. Anzahlen von Ecken, Kanten, etc. sowie Fragen zu Parallelität und Orthogonalität, die man für ein n-dimensionales Spat nur mit kombinatorischen Mitteln algebraisch erarbeiten kann, lassen sich für den vierdimensionalen Würfel (oder das vierdimensionale Spat) am dreidimensionalen Modell bzw. dessen Darstellung in der Ebene gut nachvollziehen.
Geeignet ist ein solches Thema deshalb als Ergänzung zur Vektorgeometrie in der Sekundarstufe II oder zur Anfängervorlesung über Lineare Algebra in der Hochschule. Über diese Rolle als Bindeglied zwischen Anschauung und abstrakter Geometrie hinaus kann das Thema auch als Einstieg in mehrdimensionale Geometrie und deren algebraische Darstellung genutzt werden, wobei man erfahren kann, dass sich auch von vierdimensionalen Gebilden eine gewisse Anschauung einstellt.

Um die Darstellung des vierdimensionalen Würfels im drei- bzw. zweidimensionalen anschaulichen Raum besser zu verstehen, empfiehlt es sich zunächst kurz mit der ***Darstellung des dreidimensionalen Würfels*** im zweidimensionalen Raum zu beschäftigen. Wir wählen für unseren Zweck eine Projektion entlang einer Mittellinie des dreidimensionalen Würfels.



Zunächst wird daran klar, dass die Ecken von den Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$ erzeugt werden mit $\overrightarrow{OB_1} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OB_2} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$ und $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3}$. Außerdem wissen wir, dass alle im Bild parallelen Kanten und auch die vier schräg nach hinten verlaufenden Kanten am dreidimensionalen Würfel jeweils zueinander parallel sind. Da auch alle Kanten am Würfel gleichlang sind, stellen die sechs im Bild auftretenden Vierecke Quadrate dar (einige – die trapezförmigen – eben nur perspektivisch verzerrt). Entsprechend können weitere Eigenschaften des dreidimensionalen Würfels an der Darstellung erläutert werden.
Der **4-dimensionale Würfel** wird von vier gleichlangen, paarweise zueinander senkrechten Vektoren $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_3}$, $\overrightarrow{OA_4}$ im R^4 erzeugt. Bildet man

mit diesen vier Vektoren als Basisvektoren ein Koordinatensystem des R^4, so sehen die ***16 Eckpunkte*** des 4-dimensionalen Würfels wie folgt aus:
(0/0/0/0), (1/0/0/0), (0/1/0/0), (0/0/1/0), (0/0/0/1),
(1/1/0/0), (1/0/1/0), (0/1/1/0), (1/0/0/1), (0/1/0/1), (0/0/1/1),
(1/1/1/0), (1/1/0/1), (1/0/1/1), (0/1/1/1) und (1/1/1/1).
Man kann diese Punkte in zwei Gruppen gliedern, und zwar einmal alle mit einer 0 an der vierten Stelle und zweitens alle mit einer 1 an der vierten Stelle. Wir gliedern damit den 4-dimensionalen Würfel in zwei „dreidimensionale Seiten“ (die hier jeweils einen Würfel bilden) – in Analogie zur Gliederung des dreidimensionalen Würfels in die beiden Seitenflächen der x-z-Ebene und der dazu parallelen Seitenfläche mit y = 1.
Die jeweils 8 Eckpunkte in den beiden dreidimensionalen Seitenflächen werden zunächst untereinander mit Kanten verbunden wie beim dreidimensionalen Würfel; danach kommen dann noch Kanten zwischen den beiden „Seitenwürfeln“ hinzu, und zwar als Verbindung von jeweils (x/y/z/0) mit (x/y/z/1). Insgesamt erhalten wir (12+12+8) also ***32 Kanten***, von denen jeweils 8 zueinander parallel und gleichlang sind.
Aus dieser Überlegung ergibt sich dann auch eine drei- bzw. zweidimensionale Darstellung des Kantenmodells eines 4-dimensionalen Würfels analog zur Darstellung eines dreidimensionalen Würfels in der Ebene aus zwei konzentrischen Quadraten mit Verbindung der jeweils entsprechenden Ecken.



zweidimensionales Bild
der Projektion eines
vierdimensionalen Würfels
in den dreidimensionalen
Anschauungsraum

Die 8 Eckpunkte und 32 Kanten kann man an diesem Bild gut sehen und abzählen. Auch kann man parallele Kanten gut erkennen.
Da im vierdimensionalen Raum die gestrichelten Linien durch Verschiebung des Vektors $\overrightarrow{OA_4}$ entstehen, sind auch diese acht alle zueinander paral-

lel. Da alle vier Basisvektoren gleichlang sind, sind im vierdimensionalen Raum alle 32 Kanten gleichlang. Daraus ergibt sich, dass alle Hyperebenenseiten des vierdimensionalen Würfels von dreidimensionalen Würfeln gebildet werden.
Bei dieser Darstellung treten (wie auch bei Projektionen von dreidimensionalen Figuren in die Ebene) Verzerrungen auf; z. B. stellt der von $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_4}$ erzeugte Würfel im Bild einen Pyramidenstumpf dar; er ist aber im vierdimensionalen Raum ein dreidimensionaler Würfel (analog zum Trapez im Bild des dreidimensionalen Würfels weiter oben). Gleiches gilt für die anderen fünf Seitenkörper mit gestrichelten Linien. Zusammen mit dem „inneren“ Würfel und dem „äußeren“ Würfels erhalten wir also ***8 (dreidimensionale) Würfel***, die die „***Oberfläche***“ (d. h. die 3-dimensionale Oberfläche) des 4-dimensionalen Würfels bilden. Wir können diese acht Oberflächenwürfel auch kombinatorisch aus den Basisvektoren bilden, und zwar indem jeweils drei von ihnen einen Würfel erzeugen und jeder dieser Würfel noch verschoben mit dem jeweils vierten Basisvektor auftritt (vgl. etwa am Bild den von $\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}$, $\overrightarrow{OA_4}$ erzeugten Würfel und den Würfel, der durch Verschiebung mit $\overrightarrow{OA_3}$ aus diesem hervorgeht („unten“ und „oben“).

Im Fall des 4-dimensionalen Körpers gibt es aber auch noch eine ***„zweidimensionale Oberfläche“***; sie besteht aus allen Seitenflächen der acht drei-dimensionalen Oberflächenwürfel. Da jede solche Fläche stets in genau zwei der acht Oberflächen-Würfel vorkommt, erhält man ($\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 6$) also ***24*** von den 2-dimensionalen ***Seitenflächen***, die alle zueinander kongruente Quadrate sind. Man kann diese Anzahl aber auch anhand des obigen Bildes bestimmen, z. B. indem man zuerst jeweils die sechs Seitenflächen des inneren und des äußeren Würfels zählt und dann die zwölf Verbindungsflächen zwischen je einer Kante des inneren Würfels mit entsprechender Kante des äußeren Würfel hinzuzählt. Algebraisch erhalten wir die 24 Seitenflächen, indem wir aus jeweils zwei der vier Basisvektoren ein Quadrat erzeugen und dieses dann mit den beiden anderen Basisvektoren sowie deren Summe verschieben. So erhalten wir immer vier parallele Quadrate mit sechs (4 über 2) Basisquadraten.

Betrachten wir nur ***eine Ecke*** (etwa O) so stellen wir fest, dass *von ihr 4 Kanten ausgehen* (etwa OA_1, OA_2, OA_3 und OA_4). Je zwei von ihnen bilden eine 2-dimensionale Seitenfläche, d.h. *die Ecke gehört 6 solcher Seitenflächen an* (etwa OA_1A_2, OA_1A_3, OA_1A_4, OA_2A_3, OA_2A_4 und OA_3A_4 - man veranschauliche sich diese am Bild). Je drei der von dieser Ecke ausgehenden Kanten bilden einen 3-dimensionalen Oberflächen-Würfel (etwa

$OA_1A_2A_3$, $OA_1A_2A_4$, $OA_1A_3A_4$ und $OA_2A_3A_4$); d.h. *die Ecke gehört 4 Oberflächenwürfeln* an.

Wir wollen uns nun noch der Anzahl von ***Diagonalen*** zuwenden. Da in jeder 2-dimensionalen Seitenfläche zwei „*Seitenflächendiagonalen*" vorhanden sind, gibt es von diesen[1] insgesamt *48*. Da in jedem „Oberflächen-Würfel" vier „*Seitenwürfel-Raumdiagonalen*" vorhanden sind, erhält man insgesamt *32* von ihnen[2].
Im 4-dimensionalen Würfel gibt es aber auch noch *„echte Raumdiagonalen"*, die in keiner Seitenfläche und keinem Oberflächenwürfel liegen. Diese entstehen als Verbindung einer Ecke mit einer anderen Ecke, die mit dieser keinen Oberflächenwürfel gemeinsam hat. Betrachten wir eine Ecke (etwa O) so gehen von ihr – wie oben schon festgestellt – 4 Kanten aus (zu A_1, A_2, A_3 und A_4). Weiterhin gehen durch jede Ecke 6 der zweidimensionalen Seitenflächen, in der von jeder durch diesen Eckpunkt eine Seitenflächendiagonale ausgeht (zu B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 und B_6). Schließlich gehört die Ecke noch 4 Oberflächenwürfeln an, von denen jeder eine dreidimensionale Raumdiagonale durch den fixierten Eckpunkt hat (von O zu C_1, C_2, C_3 und C_4). Damit bleibt nur noch 1 Eckpunkt übrig, der mit der zu Beginn fixierten Ecke keine Verbindung in Form einer Kante, Seitenflächendiagonale oder dreidimensionalen Oberflächenwürfel-Diagonale hat (für O ist das der Eckpunkt D); d. h. *von jeder Ecke geht genau eine „echte Raumdiagonale" aus*. Da diese genau zwei Eckpunkten angehört und wir 16 Eckpunkte haben, gibt es im 4-dimensionalen Würfel also genau ***8 echte (4-dimensionale) Raumdiagonalen*** (OD, A_1C_4, A_2C_3, A_3C_2, A_4C_1, B_1B_6, B_2B_5, B_3B_4).

Überlegungen zu Orthogonalität, Diagonalquadraten bzw. -würfeln, Teilfiguren, Symmetrien oder Dualgebilden jeweils mit Analogiebetrachtungen zum dreidimensionalen Würfel bieten ein weiteres Feld für Erkundungen mit der Kombination von anschaulichen, an der bildlichen Darstellung orientierten und vektoriellen, abstrakten Überlegungen.

Literatur

GRAUMANN, G. (2009). Spate in drei und mehr Dimensionen. In: Der Mathematikunterricht Jg. 55 · Heft 1 · Februar 2009, S. 16 - 25.

---

[1] Es ist eine gute Übung, diese mittels der Eckpunktbezeichnungen aufzuzählen.

[2] Zur Förderung von Raumvorstellung und Kombinatorik sollten diese in eine Kopie des obigen Bildes eingezeichnet sowie deren Eckpunktbezeichnungen (und vektorielle Bezeichnungen) abgeleitet werden.