Roxana GRIGORAŞ, Stefan HALVERSCHEID, Universität Bremen

Mathematisieren ohne Zahlen – eine Fallstudie

Es kommt nicht selten vor, dass sich Schüler bei mathematischen Modellierungsaufgaben fragen, wo sich die mathematischen Merkmale befinden, die für eine sinnvolle Bearbeitung benötigt werden. Dies kommt besonders bei Modellierungsaufgaben vor, bei denen die mathematische Natur in der Aufgabenstellung nicht von vorneherein klar ersichtlich ist. Dieser Beitrag untersucht im Rahmen einer Fallstudie, welche Merkmale bzw. Konzepte einer Modellierungstätigkeit einen mathematischen Charakter verleihen.

1. Theoretischer Hintergrund

Der Vollständigkeit halber soll erst kurz erläutert werden, was bei dieser Studie unter dem Begriff ‚Mathematisieren' verstanden wird. In den meisten Darstellungen von Modellierungskreisläufen werden die reale und mathematische Welt als unterschiedliche Umgebungen angesehen. Der Prozess bzw. die Aktivitäten, die den Übergang von der realen in die mathematische Welt darstellen, werden als Mathematisieren bezeichnet.

Freudenthal (1991) verwendete den Begriff des Mathematisierens sogar außerhalb des Modellierungsbereichs. Dabei vertrat er den Standpunkt, dass es keine Mathematik ohne Mathematisieren gäbe („there is no mathematics without mathematisation"); er hat zwischen horizontalem und vertikalem Mathematisieren unterschieden.

In dieser Studie soll der Begriff „Mathematisieren" anhand des Konzeptes fundamentaler Ideen untersucht werden. Schwill (1993) stellt vier Kriterien auf, anhand welcher entschieden werden kann, ob eine mathematische Idee fundamental ist. Demnach sollte eine fundamentale Idee eine Rekurrenz innerhalb unterschiedlicher Teile der Mathematik haben, sie sollte an verschiedenen Punkten in einem Curriculum wieder auftauchen, sie sollte im historischen Ablauf wieder gefunden werden, und nicht zuletzt sollte sie in entsprechenden Alltagsaktivitäten verankert sein.

Bezüglich der Beziehung zwischen mathematischen Ideen und fundamentalen mathematischen Ideen gibt es häufig mathematische Ideen im Modellierungsprozess, welche nicht unbedingt fundamentale Ideen darstellen. Es gibt Prozesse, welche keine oder kaum formale Mathematik beinhalten. Fundamentale Ideen werden hier als eine Art Bezugsrahmen vorgeschlagen, mit Hilfe welcher die mathematische Natur von Prozessen auf einem bestimmten mathematischen Niveau diskutiert werden kann, selbst wenn der mathematische Charakter nicht unbedingt ersichtlich ist. Schulkinder sind oft nicht in der Lage, Mathematik zu formalisieren, da sie nur begrenzt mathematische Abläufe, Algorithmen, etc. beherrschen. Aus diesem Grunde wird hier vorgeschlagen, nach fundamentalen mathematischen Ideen in ihren Ansätzen zu suchen und diese zu analysieren.

Die folgende Liste ist der Synopse von Schweiger (2006) aus diversen Quellen zu fundamentalen Ideen entnommen: Algorithmus, Charakterisierung, Kombinieren, Gestaltung, *Annäherung*, Erklären, Funktion, *Geometrisieren*, Unendlichkeit, Invarianz, Linearisierung, *Lokalisieren*, *Messen*, *Zählen*, *Optimalität*, Wahrscheinlichkeit, und Formen. Kursiv sind diejenigen fundamentalen Ideen dargestellt, die innerhalb dieser Fallstudie beobachtet wurden. Des Weiteren ist es bisweilen schwierig zu entscheiden, ob alle mathematischen Ideen auf fundamentale Ideen dieser Liste bezogen sind.

2. Untersuchungsdesign und Ziel

Bremer Gymnasialschüler/innen im Alter zwischen 12 und 13 Jahren, ohne Vorbildung im Modellieren, wurden in Teams organisiert, wobei die Teamstärke zwei bis drei Mitglieder betrug. Die Bearbeitung der Aufgabe wurde mit Videokameras im universitären Labor aufgezeichnet. Dabei hatten die Schüler, die sich freiwillig für diese Untersuchung gemeldet haben, ca. 50 Minuten Bearbeitungszeit für folgende Aufgabe zur Verfügung:

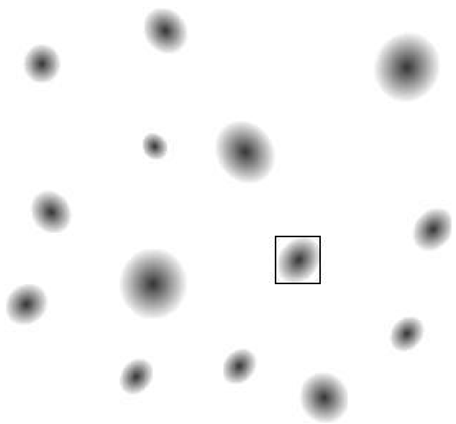

Abb. 1: Kraterlandschaft auf der Marsoberfläche

„Ein Astronaut wird zum Mars geschickt. Sein Landeplatz ist mit einem Quadrat gekennzeichnet und seine Aufgabe besteht darin mit einem Marsmobil auf der Marsoberfläche zu fahren und die Krater zu untersuchen. Du kannst das Marsmobil des Astronauten von der Erde aus steuern. In welcher Reihenfolge würdest du den Astronauten die Krater untersuchen lassen? Finde dabei erst heraus, welche Aspekte zu berücksichtigen sind. Beachte auch, dass der Astronaut wieder zum Landeplatz (Quadrat) zurückkehren muss, da er von dort aus wieder zurück zur Erde fliegt.“

Diese Übung hatte zum Ziel zu erforschen, ob fundamentale mathematische Ideen in den Lösungsversuchen der Schüler beobachtet werden konnten. Aus diesem Grunde wurde speziell eine Aufgabe ohne Zahlen (Marsaufgabe) für den Mathematisierungsprozess von Schüler/inne/n gewählt, die Schwierigkeiten beim Formalisieren von Mathematik haben.

3. Ergebnisse

Zwei Lösungsvorschläge von Schüler/inne/n für die oben beschriebene Marsaufgabe sind in Abb. 2 dargestellt. Tatsächlich handelt es sich bei der Marsaufgabe um eine Variante eines ‚Travelling salesman problem' (siehe auch Grigoraş & Halverscheid (2008)), bei der - jeder Krater zu Erkundungszwecken besucht werden muss. Dabei wurde kein Hinweis gegeben, wie oft ein Krater vom Astronauten besucht werden muss. Es handelt sich um ein bekanntes kombinatorisches Optimierungsproblem, bei dem die Schüler/innen beim Lösen völlig allein gelassen und damit konfrontiert wurden herauszufinden, was überhaupt ‚optimal' für sie bedeutet.

Die verschiedenen Farben und Pfeile deuten auf unterschiedliche Routen hin, mit Hilfe derer entschieden wird, welche Route die Beste ist. Die Zahlen in dem rechten Lösungsvorschlag bezeichnen die Reihenfolge in welcher der Astronaut die Krater besuchen sollte. Gleichzeitig stellt dies eine Art Kennzeichnung bzw. Beschriftung der einzelnen Krater dar. Nach einigen Messungen entschieden sich die Kinder für die günstigste Route einer Länge von 29 cm in der Skizze. Daraufhin hatten sie die Idee, auch den Durchschnitt der Abstände zwischen den verschieden Kratern zu berechnen, wobei sie zu dem Resultat 2 cm kamen. Allerdings wussten die Kinder nicht genau, weswegen sie dies berechneten. Deshalb waren sie nicht sicher, wie sie weiter mit diesem engagiert erworbenen Resultat weiter anstellen sollten.

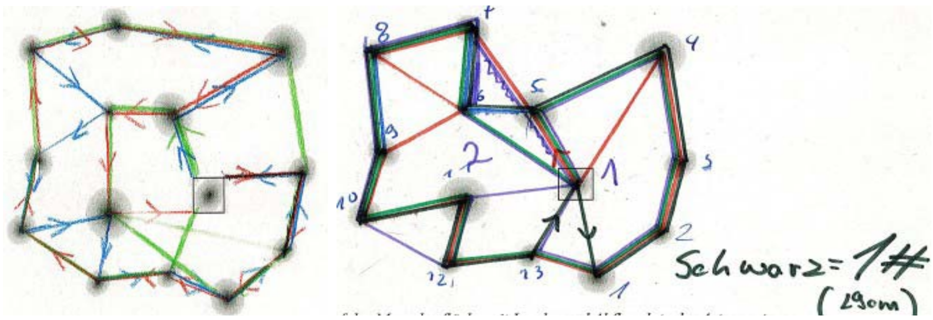

Abb. 2: Zwei Lösungsvorschläge für die Marsaufgabe

Die folgenden Muster wurden während der Bearbeitung beobachtet: die Schüler/innen haben sich selbst immer nur kleine Teilaufgaben auferlegt, ohne sich unbedingt im Klaren zu sein, weshalb sie so verfahren haben, wie beispielsweise beim Errechnen des Durchschnittsabstandes zwischen den Kratern. Was jedoch in den verschiedenen Lösungsansätzen erkannt werden konnte ist, dass fundamentale mathematische Ideen als Startpunkt für die weitere Ausarbeitung und Konkretisierung der Aufgabe benutzt werden.

4. Zusammenfassung

Das Aufgabenkonzept widerspricht gängigen Gewohnheiten aus dem Mathematikunterricht, wobei auch die Bewusstheit des mathematischen Charakters der Aufgabe zwischen den Schüler/inne/n stark variiert. Wenn diese Bewusstheit aber besteht, schien sie dies beim Anfertigen der ‚machbaren' Aufgabenteile zu beflügeln. Zusammenfassend kann gesagt werden, dass zwei verschiedene Typen des Mathematisierens gegenwärtig waren, nämlich bewusstes und unbewusstes Mathematisieren.

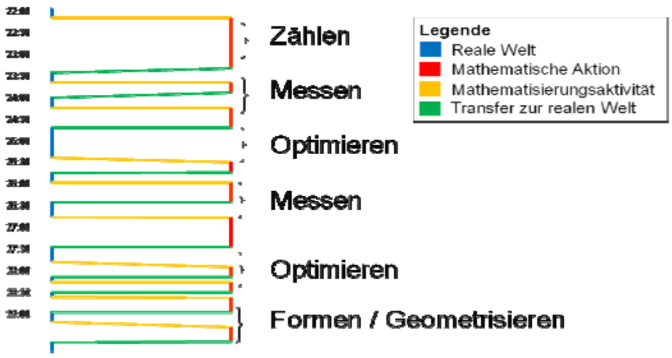

Abb. 3: Schema zum Wechsel zwischen Realität (links) und Mathematik (rechts)

In dieser Fallstudie kamen am häufigsten die fundamentalen Ideen Messen, Zählen, Optimieren und Geometrisieren vor. Dabei überschneiden sich fundamentale Ideen oft, wie beispielsweise Optimieren und Messen, welche nicht selten zusammen vorkommen. Beispielsweise kann das Suchen der Mitte sowohl als Geometrisierung, wie auch als Optimierung betrachtet werden. Dabei kann ein fließender Übergang zwischen Mathematik und Realität bemerkt werden. Das Diagramm in Abb. 3 fasst die Erkenntnisse der Fallstudie zusammen und gibt einen Auszug der Art der geschilderten Abläufe anhand einer Zeitskala (vergleiche auch (Halverscheid, 2008)).

Literatur

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education. China Lectures.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Grigoraş, R. & Halverscheid, S. (2008). Modelling the travelling salesman problem: relations between the world of mathematics and the rest of the world. In Figueras O. & al. (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Vol. 3, (pp. 105-112), Morelia, México: Cinvestav-UMSNH.

Halverscheid, S. (2008). *Building a local conceptual framework for epistemic actions in a modelling environment with experiments*, Journal for Research in Mathematics Education, 40 (2), 225 – 234.

Schweiger, F. (2006). Fundamental ideas. A bridge between mathematics and mathematical education. In J. Maasz & W. Schloeglmann (Eds), *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 63 -73). Sense Publishers.

Schwill, A. (1993). *Fundamentale Ideen der Informatik*, Journal for Research in Mathematics Education, 93(1), 20 – 31.