Thomas HAFNER, Bielefeld

Proportionalität und Prozentrechnung – längsschnittliche Entwicklung elementarer Modellierungskompetenzen

Die curricularen Kerninhalte der Sekundarstufe I *Proportionalität* und *Prozentrechnung* nehmen über den Schulalltag hinaus eine bedeutende Rolle in unserem Leben ein. So begegnet man z. B. Prozentsätzen beim täglichen Einkauf in Form von Mehrwertsteuer, Preisnachlässen oder -steigerungen. Nicht zuletzt aus diesen Beispielen wird deutlich, dass der sichere Umgang dieser Lerninhalte unumstritten zur mathematischen Grundbildung zählt. Daher ist es umso besorgniserregender, dass viele Schülerinnen und Schüler in diesen Bereichen sogar am Ende der Pflichtschulzeit erhebliche Defizite aufweisen (vgl. etwa Berger, 1991).

In diesem Zusammenhang stellen sich folgende Fragen: Wie verläuft die Kompetenzentwicklung in den Inhaltsbereichen *Proportionalität* und *Prozentrechnung* von der 5. bis zur 10. Klasse? Worin liegen besondere Schwierigkeiten beim Lösen entsprechender anwendungsorientierten Aufgaben bei Schülerinnen und Schüler?

Forschungszusammenhang

Vergleichsuntersuchungen wie TIMSS und PISA sind querschnittlich angelegt und geben daher kaum Aufschlüsse über Entwicklungsverläufe mathematischer Kompetenzen sowie mögliche Gründe für Leistungsdefizite (vgl. Pekrun, 2002). Dies war unter anderem Motivation für die von der DFG geförderten Längsschnittstudie *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA)* (vgl. vom Hofe et al., 2005).

Beginnend mit einer repräsentativen Stichprobe bayerischer Fünftklässler wurde diese zwischen 2002 und 2007 im Jahresrythmus am Ende eines Schuljahres getestet. Die konzeptionelle Leitidee des Mathematikleistungstests versteht mathematische Grundbildung im Sinne von *mathematical literacy* (vgl. OECD, 2003). Hinsichtlich dieser Anforderungen nimmt die prozessbezogene Kompetenz des Modellierens einen zentralen Stellwert ein.

Modellieren und die Rolle von *Grundvorstellungen*

Die Bearbeitung kontextgebundener Problemstellungen vollzieht sich in mehreren aufeinander aufbauenden Schritten. Die einzelnen Stationen und Phasen des zugehörigen Lösungs- bzw. Modellierungsprozesses werden im Modellierungskreislauf in Abb. 1 vereinfacht schematisch und graphisch dargestellt (vgl. Schupp, 1988; vom Hofe, 2003).

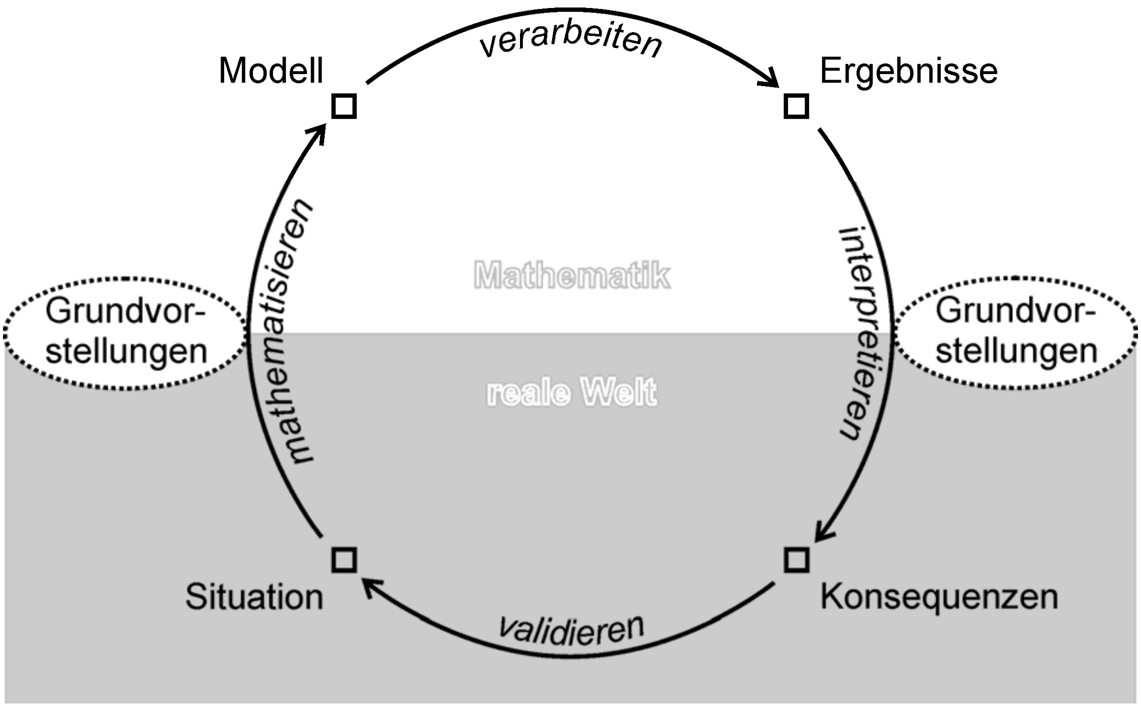

Abb. 1: Modellierungskreislauf mit Grundvorstellungen

Ausgehend von einer problemhaltigen *Situation* aus der *realen Welt* muss diese zuerst in ein *mathematisches Modell* überführt werden. Durch diese Abstraktion wird ein Wechsel von der *realen Welt* in die *Mathematik* vollzogen. Aus den Informationen des Modells lassen sich mathematische *Ergebnisse* ermitteln, die wiederum mit Blick auf die reale Welt *interpretiert* werden müssen. Daraus resultierende *Konsequenzen* für das zu untersuchende Problem werden in einem letzten Schritt *validiert* und auf Plausibilität überprüft.

Um die Übergänge zwischen realer Welt und Mathematik erfolgreich zu gestalten sind *Grundvorstellungen* zu mathematischen Inhalten notwendig. Zur theoretischen Einordnung des Grundvorstellungskonzeptes sei auf vom Hofe (1995) verwiesen.

Im Rahmen dieses Beitrags werden nur Beispiele für Grundvorstellungen zum Prozentbegriff betrachtet. Blum & vom Hofe (2003) stellen diesbezüglich drei unterschiedliche Grundvorstellungen heraus.

- von-Hundert-Vorstellung: Eine Menge G bestehe aus lauter Teilen zu je 100 Einheiten. Unter p% von G versteht man von jedem 100er-Paket p Einheiten.
- Hundertstel-Vorstellung: p% wird als Bruch bzw. Bruchoperator aufgefasst.

– Bedarfseinheiten-Vorstellung: Einer Grundmenge wird der Prozentsatz 100% zugeordnet. Die Grundmenge wird damit in 100 gleich große Teile zerlegt.

Längsschnittliche Kompetenzentwicklung

Aus den bei PALMA erhobenen Längsschnittdaten wird eine eigene Subskala *Proportionalität und Prozent* gebildet. Die Auswertung entsprechender Daten erfolgt nach dem dichotomen Rasch-Modell und erlaubt die längsschnittliche Darstellung der Leistungswerte. Diese Kompetenzentwicklung von 1319 Schülerinnen und Schülern von Messzeitpunkt 1 (MZP 1, 5. Klasse) bis Messzeitpunkt 5 (MZP 5, 9. Klasse) ist in Abb. 2 dargestellt. Nach Beendigung der Pflichtschulzeit konnten zu MZP 6 noch 977 Lernende getestet werden. (Normierung der Leistungswerte: Mittelwert $_{\text{MZP 5}}$ = 1000, Standardabweichung $_{\text{MZP 5}}$ = 100)

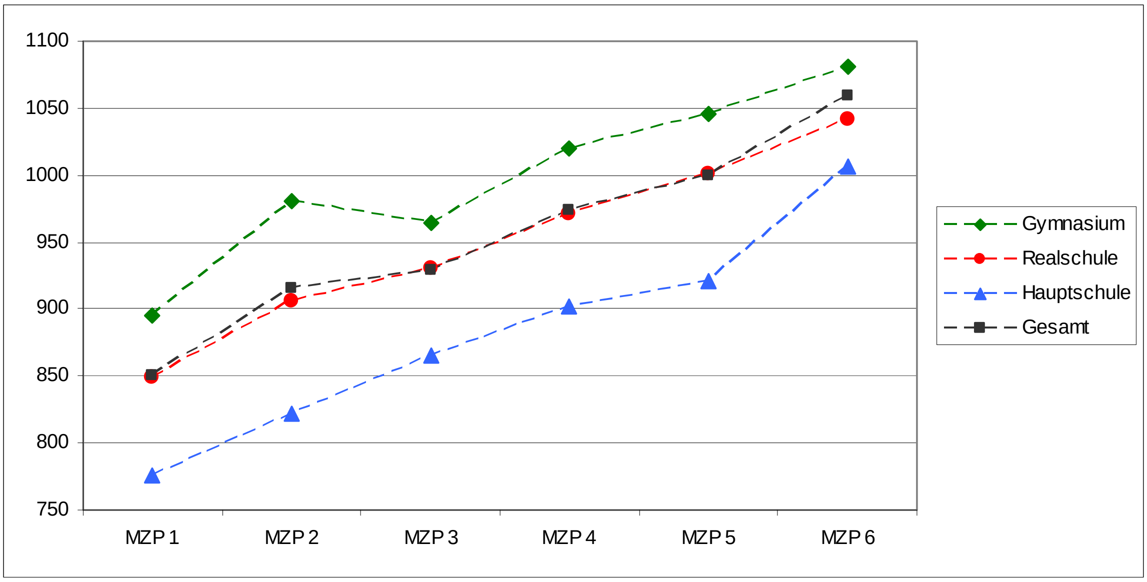

Abb. 2: Kompetenzentwicklung der Subskala *Proportionalität und Prozent*

Erwartungsgemäß erzielen Gymnasiasten im Mittel signifikant höhere Leistungswerte als Schülerinnen und Schüler an Realschulen, die wiederum signifikant bessere Kompetenzwerte als Lernende an Hauptschulen erreichen. Der überdurchschnittliche Kompetenzzuwachs bei der Hauptschule von MZP 5 zu MZP 6 lässt sich dadurch erklären, dass die meisten Schülerinnen und Schüler die Hauptschule nach der 9. Klasse verlassen; bei den verbleibenden handelt es sich um vergleichsweise leistungsstarke Schülerinnen und Schülern, die in einem zehnten Zusatzjahr die Mittlere Reife erlangen können. Während an Haupt- und Realschule zwischen allen Messzeitpunkten signifikante Leistungssteigerungen zu verzeichnen sind, stagnieren die Leistungen am Gymnasium von MZP 2 auf MZP 3. Ein möglicher Grund ist im Lehrplan zu sehen, der die Behandlung der mathematischen Inhalte bzgl. Proportionalität und Prozent ausschließlich in der 6. Jahrgangsstufe vorsieht.

Interviewstudie

Um detaillierte Informationen zum Lösungsprozess bei Schülerinnen und Schülern zu erhalten, wurden zu MZP 2 und MZP 3 je 36 halbstandardisierte Interviews durchgeführt. Die Detailanalysen lassen sich folgendermaßen zusammenfassen.

- Hauptprobleme und -schwierigkeiten liegen im Bereich der Übersetzungsprozesse zwischen Realität und Mathematik.
- Typische Fehlstrategien lassen sich auf fehlende oder unvollständig ausgebildete Grundvorstellungen zurückführen.
- In vielen Fällen zeigt sich von der Klasse 6 zu Klasse 7 eine hohe Stabilität von Fehlstrategien.

Literatur

Berger, R. (1991). Leistungen von Schülern im Prozent- und Zinsrechnen am Ende der Hauptschulzeit. Ergebnisse einer fehleranalytisch orientierten empirischen Untersuchung. *Mathematische Unterrichtspraxis, 1*, 12. Jahrgang, 30-44.

Blum, W. & vom Hofe, R. (2003). Welche Grundvorstellungen stecken in der Aufgabe? *Mathematik lehren, 118,* 9-18.

OECD (2003). The PISA 2003 *Assessment Framework- Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge Skills*. Paris: OECD Publication Service.

Schupp, H. (1988). Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der Sekundarstufe zwischen Theorie und neuen Impulsen. *Der Mathematikunterricht, 34,* 5-16.

vom Hofe, R. (2003). Grundbildung durch Grundvorstellung. *Mathematik lehren, 118,* 4-8.

vom Hofe, R., Kleine, M., Blum, W. & Pekrun, R. (2005). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Jahrbuch für pädagogisch-psychologische Diagnostik. Tests und Trends,* Band 4 (S. 263-292). Göttingen: Hogrefe.

Pekrun, R. (2002). Vergleichende Evaluationsstudien zu Schülerleistungen. Konsequenzen für die Bildungsforschung. *Zeitschrift für Pädagogik, 48*, 111-128.