

Kurt HESS, Zug (CH)

Aufbau einer mathematischen Strategie-Bewusstheit im arithmetischen Anfangsunterricht!

1. Beweggründe

Der Appell in der Überschrift hat zwei Beweggründe: Zum Einen mehrten sich in den letzten Jahren mathematik-didaktische Publikationen mit reichhaltigen Aufgaben, die eine natürliche Differenzierung und ein aktiv-entdeckendes Lernen ermöglichen (z.B. Ruwisch, 2003; Rasch, 2007; Hirt & Wälti, 2008; Hengartner, Wälti & Hirt, 2007). Damit entstanden wichtige innovative Grundlagen für den Mathematikunterricht, welcher aber nach wie vor den mathematischen Kompetenzaufbau im Blick haben soll. Deshalb ist es unverzichtbar, dass offenere Aufgaben von diagnostischen Kriterien geleitet werden. Aus dem Forschungsprojekt *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte* (ebd.) ist ein solches diagnostisches Folgeprojekt mit dem Namen *förderorientierte Beurteilung 4- bis 8-jähriger Kinder* entstanden, in welchem wir die vorliegenden Lernumgebungen mit diagnostischen Kriterien versehen und für Kinder, welche bescheidene Leistungen zeigen, geeignete Förderideen mit einem gezielten mathematischen Kompetenzaufbau entwickeln (Hess & Wälti, 2009). Die Förderideen für beide Kindergartenjahre und die 1./2. Klasse sollen den Kindern ermöglichen, eine mathematische Strategie-Bewusstheit aufzubauen.

Zum Andern untersuchten Studierende der PHZ Zug (CH) in einem Längsschnitt mit Messungen im 2. Kindergartenjahr¹ und in den ersten beiden Klassen die mathematischen Strategien, mit welchen rund 50 Kinder Additionen und Subtraktionen lösen. Dazu einige Ergebnisse in Thesenform:

1. Bereits Kindergartenkinder zeigen reichhaltige mathematische Strategien und eine beachtliche Strategie-Bewusstheit.
2. Einigen Kindern gelingt es nicht oder nur bescheiden, ihre mathematischen Strategien und ihre Strategie-Bewusstheit zwischen der ersten und der letzten Messung weiter zu entwickeln und zu differenzieren.
3. Zählendes Rechnen ist nicht gleich zählendes Rechnen: Es gibt innerhalb von Zählstrategien eigentliche „Kompetenzstufen“, die aufeinander aufbauen (vgl. *Aufbau einer mathematischen Strategie-Bewusstheit*).
4. Die schwächsten Rechnerinnen und Rechner unterscheiden sich kaum von den stärksten bezüglich richtiger Rechenresultate, jedoch hinsichtlich ihrer Strategien und ihrer Strategie-Bewusstheit.

¹ Die in die Untersuchung einbezogenen Kindergärten kennen kein mathematisches Curriculum. Ein solches ist erst nach dem laufenden schweizerischen Reformprojekt (HarmoS) vorgesehen. Das Alter im Kindergarten liegt zwischen 4 und 6 Jahren.

Kommentar zu den Ergebnissen 1, 2 und 4:

Ad 1) Alle Kindergartenkinder zeigten mindestens die einfachste Strategie „alles zählen“. Auch das Weiterzählen vom ersten und vom grösseren Summanden aus, der statische Fingergebrauch, mentale Gliederungen sowie ein generiertes Abrufwissen (v. a. bei Verdoppelungen bis $5 + 5$) befanden sich im Repertoire der Kinder. Die Strategie-*Bewusstheit* kann und darf aber in diesem Alter nicht alleine an der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit festgemacht werden. Für viele Kinder ist es wesentlich einfacher, ihre Strategie an den eigenen Fingern zu zeigen oder sie zu legen. Die didaktische Konsequenz für den Schulanfang lässt sich mit Selters 1995 aufgerufener Formel „zur Fiktivität der ‚Stunde Null‘ im arithmetischen Anfangsunterricht“ treffend umschreiben. Mit anderen Worten: Der Anfangsunterricht hat die Kinder zu fragen, wie sie Operationen lösen und er soll sie weiter führende bzw. ökonomischere Strategien entdecken und prüfen lassen. Leider ist vielerorts zu beobachten, dass nicht nachgefragt, sondern beigebracht wird ...

Ad 2) In *jeder* Schulklasse fielen Kinder auf, welche ihr Repertoire an mathematischen Strategien zwischen dem Kindergarten und anfangs zweiter Klasse nur bescheiden erweiterten. Zudem traten auch relativ grosse Interklassendifferenzen auf, welche vermuten lassen, dass in den einen Klassen diesbezügliche Angebote grösser und/oder gezielter sind als in anderen.

Ad 4) Die letzte These vergleicht die Vielfalt der gezeigten Strategien mit der Anzahl richtiger Ergebnisse, welche nur wenig differierte. Auch die schwächsten brachten ein richtiges Resultat mit der einfachsten Zählstrategie zustande, wohingegen andere bereits anspruchsvolle Strategien zeigten.

2. Zählentwicklung

Bereits im Kindergarten ist es angezeigt, bezüglich Zählprinzipien, Zählprozessen und Zählstrategien Förderangebote zu machen, auch wenn die Theorie zur Zählentwicklung (Gelman & Gallistel, 1978) davon ausgeht, dass Vierjährige (in der Regel) über die elementaren drei Zählprinzipien verfügen. Die Theorie (ebd.) umfasst fünf Zählprinzipien, welche in ihrer Gesamtheit einen reifen Zahlbegriff ausmachen. Das erste Prinzip beinhaltet die Eins-zu-eins-Korrespondenz zwischen Zahlnamen und Zählelementen. Dies gelingt, wenn die Kinder eine Ordnung in eine Kollektion bringen, damit der Beginn und das Ende des Zählvorgangs eindeutig sind. Zudem kommt den Kindern gerne eine inkonsequente visuo-motorische Koordination in die Quere, indem sie zwei Zahlnamen sagen und nur ein Element zeigen oder umgekehrt. Bereits dieses erste Prinzip lädt dazu ein, dass die Kinder singuläre Zählwege und -prozedere vergleichen und austauschen. Das zweite Prinzip beinhaltet die stabile Reihenfolge der Zahlna-

men, welches sich über geeignete Lieder und Reime interiorisieren lässt. Schliesslich besagt das Kardinalitätsprinzip, dass das letzte gezählte Element die Mächtigkeit einer Menge beschreibt. Die genannte altersmässige Verfügbarkeit dieser drei Prinzipien sollte die Forderung rechtfertigen, dass die aufzubauende *Zähl-Bewusstheit* ins Curriculum des Kindergartens gehört. Das vierte und fünfte Prinzip ist an abstraktere Denkleistungen gebunden, welche vielen Kindern erst im Verlauf der ersten Klasse² möglich sind. Es macht also Sinn, im Kindergarten an der Verinnerlichung und Flexibilisierung (vgl. Moog, 1995) des Zählens zu arbeiten, also am Vor- und Rückwärtszählen von jeder Zahl aus. Beim Aufbau einer *Strategie-Bewusstheit* bei Zählprozessen sollen sich die Kinder bewusst mit den eigenen Händen, ihrem Zählen und demjenigen anderer auseinandersetzen. Damit erarbeiten sie sich Grundlagen für folgende Kompetenzerweiterungen.

3. Zählstrategien

Alle Kindergartenkinder zeigten die einfachste Zählstrategie „alles Zählen“ ($3 + 2 = 1, 2, 3 + 1, 2 = 1, 2, 3, 4, 5$). Auf der nächsten „Kompetenzstufe“ zählen die Kinder nur noch vom ersten Summanden aus. Dies gelingt mit der genannten Flexibilisierung des Zählens. Die dritte Strategie bedient sich des Kommutativgesetzes und ist daher keine reine Zählstrategie mehr. Bei dieser Mischstrategie vertauschen die Kinder die Summanden – wenn der erste kleiner ist als der zweite – und zählen anschliessend vom grösseren Summanden aus. Erkennt eine Lehrperson solche Unterschiede, so kann sie entsprechende Fortschritte Wert schätzen und die Kinder ihre Strategien vergleichen und austauschen lassen. Angezeigt ist ein ehrlicher und offener Umgang mit Zählstrategien und sicherlich kein Verbot des Zählens.

4. Weiterführende Strategien (Lösung von Zählstrategien)

In einer weiterführenden Strategie nutzen die Kinder simultan gezeigte Fingerbilder statisch, also nicht mehr dynamisch zählend (Lorenz, 1992, S. 174). Der statische Fingergebrauch ist demnach als eine Ablösung vom Zählen zu sehen. Das simultane Zeigen der Fingerbilder 6 bis 10 bedarf bereits einer mentalen Gliederung (z.B. Aufteilung des Achters in $5 + 3$).

Die bewegliche mentale Gliederungsfähigkeit bis 20 lässt Mengen ökonomisch zerlegen und additiv aufbauen. Es ist von Bedeutung, dass bereits der Fünfer mental gegliedert werden muss. Drei und vier Elemente sind simultan erfassbar, bei fünf ist dies nicht mehr möglich (Hess, 2003). Neben der Nutzung von Software-Produkten kann und soll die Gliederungsfähigkeit aufgebaut werden, indem die Kinder selber Mengendarstellungen

² Der Schuleintritt erfolgt in der Deutschschweiz mit ca. 7 Jahren.

erzeugen und sie mit verschiedenen Farben, Abständen, Formen und Grössen der Elemente gliedern. Die Güte der Gliederungen können sie überprüfen, indem sie sie selber (oder gegenseitig) blitzen und folgend optimieren.

Mit operativ strukturierten Päckchen bietet sich eine weitere Strategie zur Ablösung zählender Verfahren an. In diesen ist die Abfolge der Operationen nicht zufällig, sondern reguliert. Beispiel: $7 + 3 / 7 + 4 / 6 + 5 / 7 + 5 / 8 + 5$ etc. Die Operationen lassen sich voneinander ableiten, zunächst durch Iteration (der zweite Summand wächst um eins). Nach $7 + 4$ liegt ein „Strukturbruch“ vor, bei $6 + 5$ bleibt die Summe gleich, weil mit dem Satz *Konstanz der Summe* der erste Summand um eins kleiner und der zweite um eins grösser wird. Anschliessend wächst die Summe mit dem ersten Summanden. Die Übungsstruktur der Zahlenbücher sieht vor, dass beim Einspluseins „nur“ die sog. „Königsaufgaben“, welche in der Plustafel rot, grün oder blau gefärbt sind, als Abrufwissen zu generieren sind. Die Additionen in den hellgelben Feldern sollen aus den Königsaufgaben ableitbar sein. Die Nutzung von Ableitstrategien ermöglicht es, Operationen ökonomischer und beweglicher zu lösen. Wiederum ist entscheidend, dass die Kinder durch Übersetzung der Rechnungen in Handlungen, Bilder und Sprache zu einer *Strategie-Bewusstheit* gelangen. Mit den Ableitstrategien ist auch ein Bewusstsein gegenüber den Königsaufgaben aufzubauen, d.h. über deren Nutzen. Beim Aufbau einer mathematischen *Strategie-Bewusstheit* ist also lehrerseits eine differenzierte Diagnostik und Förderung und schülerseits die soziale Interaktion über singuläre Kompetenzen zentral.

Literatur

- Hengartner, E., Wälti, B. & Hirt, U. (2007). *Lernumgebungen für Rechenschwache bis Hochbegabte. Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Zug: Klett.
- Hess, K. (2003). *Lehren – zwischen Belehrung und Lernbegleitung. Einstellungen, Umsetzungen und Wirkungen im mathematischen Anfangsunterricht*. Bern: hep.
- Hess, K. & Wälti, B. (2009, in Vorbereitung). Mathe förderorientiert beurteilen. In Gabriele Cwik (Hrsg.) *Selbstständiges Lernen unterstützen. Konzepte und Methoden, Unterrichtsbeispiele. Für die Klassen 1 bis 4*. Berlin: Cornelsen-Skriptor.
- Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht. Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Lorenz, J.H. (1992). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht. Mentales visuelles Operieren und Rechenleistung*. Göttingen: Hogrefe.
- Moog, W. (1995). Flexibilisierung von Zahlbegriffen und Zählhandlungen – ein Übungsprogramm. *Heilpädagogische Forschung*, 21, 113-121.
- Rasch, R. (2007). *Offene Aufgaben für individuelles Lernen im Mathematikunterricht der Grundschule 1 + 2*. Seelze-Velber: Kallmeyer.
- Ruwisch, S. & Peter-Koop, A. (Hrsg.) (2003). *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule*. Offenburg: Mildenerger.
- Selter, Ch. (1995). Zur Fiktivität der ‚Stunde Null‘ im arithmetischen Anfangsunterricht. *Mathematische Unterrichtspraxis*, (2), 11-19.