Romualdas KAŠUBA, Vilnius

Wie viele Wörter braucht man, um einen mathematischen Inhalt zum Ausdruck zu bringen?

„In der Kürze liegt die Würze". Wie kurz kann eine anregende Aufgabe sein? Kürze, die etwas in sich birgt, ist nicht allzu häufig anzutreffen und übt wahrscheinlich gerade deshalb auch nicht selten eine beinahe magische Anziehung aus. Kürze ist auch in der Pädagogik wichtig und wertvoll. In der kurzen Formulierung einer Aufgabe steckt sehr häufig wirklich etwas Ansteckendes. Kurze Aussagen prägen sich ein, man wird sie so schnell nicht vergessen – denken Sie an Sprichwörter oder an Kindergedichte. In der Kürze liegen also auch große Reserven für den mathematischen Unterricht.

Wenn wir schon die Poesie angesprochen haben, so fragen wir gleich, wie man auf eine interessante Weise die weltbekannte Sache, dass sechs mal vier genau vierundzwanzig ausmacht, darstellen könnte? Auf alle möglichen Anleitungen und auf Veranschaulichungen z. B. durch Murmeln wollen wir nicht eingehen und weisen gleich auf eine Antwort, die kaum zu übertreffen ist. Man kann nicht gleich sagen, woher das berühmte Beispiel stammt:

„Wenn ich sechs Hengste zahlen kann,
Sind ihre Kräfte nicht die meine?
Ich renne zu und bin ein rechter Mann,
Als hätt ich vierundzwanzig Beine."

Wo steht das? Wer hat es gesagt? Raten Sie mal? Ja, ja, richtig, es ist aus Goethes Faust, Zeile 1824 ff., Studierstube, nach dem Pakt von Faust mit Mephisto.

Wenn es um eine Standard-Antwort geht, die Antwort auf die gestellte Frage auch nicht allzu schwer ist, genügt oft ein Satz. Lässt sich denn dann mit einem Satz schon etwas Unerwartetes zum Ausdruck bringen? Es ist nicht schlecht, dies als eine offene Herausforderung zu verstehen.

Man finde zwei aufeinanderfolgende zweiundzwanzigstellige Zahlen mit geraden Quersummen.

Wie ist es hier mit dem mathematischen Inhalt? Ist er denn in diesem Falle schon zu erkennen? Man könnte darüber mächtig streiten. Aber eines ist doch sicher klar: Wenn wir schon nach etwas, was nicht gerade typisch ist, fragen, dann steckt bestimmt gewiss mehr als nur die reine Wissbegier dahinter. Oder?

Und an solchen Stellen liegt oft der Eingang zu vielen Wissenschaften.

Man zerlege alle Teiler der Zahl 100000 in zwei gleichgroße Mengen
mit gleichgroßer Summe der Teiler.

Ist $40 \cdot 66 \cdot 96 + 53 \cdot 83 \cdot 109$ eine Primzahl?

Ist 1 601 603 eine Primzahl?

Ist 1 280 000 401 eine Primzahl?

Man finde eine 7-stellige Zahl, deren Ziffern alle verschieden sind
und die teilbar durch jede dieser Ziffern ist?
Gibt es denn auch eine solche 8-stellige Zahl?

Man kann sagen, dass eine Aufgabe, die sich mit einem Satz umfassen lässt, normalerweise dazu auffordert, dass man etwas entdecken muss. Manches mag da sehr oft recht paradox aussehen oder ganz unmöglich erscheinen – und doch gibt es so etwas. Und umgekehrt: Man fragt etwas scheinbar so Leichtes und Alltägliches und dieses erweist sich als unmöglich.

Man kann mit Recht fragen, wozu soll es gut sein? Wenn wir eine konkrete Aufgabe der Art "Finden einer Zahl mit Eigenschaften" stellen, sollten wir eigentlich stets darüber nachdenken, ob es dem Lösenden wirklich einen Nutzen bringen wird. Wir wollen ihn doch nicht gleich erschrecken oder gar abstoßen, wir wollen auch bestimmt nicht, dass er nach fünfminütigem Probieren sagt, es sei nicht interessant. So sollten wir dem Lösenden am Anfang etwas bieten, was beinahe direkt greifbar, aber doch niemals banal ist.

Zum Beispiel könnten wir die nicht gerade einfache Aufgabe 2 aus dem Bundeswettbewerb Mathematik, 1. Runde Jahrgang 2008, anbieten. Auch hier genügt wiederum ein Satz, also nur einige Wörter, den nicht leicht zu erspürenden Inhalt umfassend auszudrücken.

Man stelle die Zahl 2008 so als Summe natürlicher Zahlen dar, dass die Addition der Kehrwerte der Summanden die Zahl 1 ergibt.

Diese Aufgabe könnte man als eine demokratische Aufgabe bezeichnen, weil sie einerseits in dem so hoch angesehenen Wettbewerb auftaucht und weil sie andererseits jeder normale Schüler, der sich die Zeit dazu nimmt, früher oder später doch erfolgreich bewältigen kann. Wenn er aber ein bisschen Glück hat oder einfach sehr gut ausgeschlafen ist, so kann er gleich beim ersten Versuch die Antwort anbieten. Aber das schafft nicht jeder sofort, auch nicht jeder Zweite und auch nicht jeder Dritte.

Aber manche würden gleich 2008 als zwanzigmal 80 plus zehnmal 40 und dazu noch zweimal 4 darstellen und mit den 32 Kehrwerten von diesen Summanden hätten sie somit ihr Ziel erreicht und die Summe 1 bekommen.

Hier ist es gelungen, den Umstand auszunutzen, dass 2008 eine an das Problem doch ziemlich gut angepasste Zahl ist. Was aber, wenn wir diese letztjährige Jahreszahl 2008 durch 2009 ersetzen und um eine ähnliche Zerlegung bitten würden?

Jetzt gibt es kaum die Möglichkeit, eine solche Zerlegung gleich zu erraten. Aber statt Raten und Probieren kann man jetzt die Kunst demonstrieren, Schichten eines Problems aufzudecken und einen Zugang zur Theorie zu finden. Wir lassen jetzt aus der Zahl 2008 die Nullen aus und bitten zuerst, eine bescheidene Zahl 28 darzustellen. Es ist sehr einfach, weil

$$28 = 8 + 8 + 4 + 4 + 4 \quad \text{und} \quad 1 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

Jetzt könnte man den, der einsteigen will, gleich weiter fragen, wie wäre es denn dann mit einer entsprechenden Darstellung der Zahl

$$58 = 2 \cdot 28 + 2$$

und gleichzeitig auch mit

$$65 = 2 \cdot 28 + 9 = 2 \cdot 28 + 6 + 3.$$

Mit diesen drei doch so einfachen Beispielen ist der Zugang zur Lösung solcher Aufgaben schon völlig ausreichend angedeutet.

Jetzt aber, wo wir schon Bescheid wissen, dass ein einziger Satz genügt, um mathematische Fragen zu formulieren, müssten wir auch ganz klar zum Ausdruck bringen, dass ganz und gar nicht jede Frage, die man mit einem Satz umfassen kann, interessant ist. Dann sollte man immer wieder insbesondere aus Respekt vor der Schule und vor der Neugierde von Jugendlichen doch lieber etwas Interessantes, etwas Unerwartetes fragen. Oder in der Frage müsste etwas enthalten sein, das auf eine irgendwie unauffällige Weise interessant und impulsierend wirkt, zum Beispiel wenn etwas auf den ersten Blick völlig unmöglich erscheint.

Wenn wir fragen würden, ob es möglich ist, in einem und demselben Hundert vier solche dreistellige Zahlen zu finden, dass die Summe von allen vier durch drei von diesen Summanden teilbar ist, so würden Sie alle zusammen mit uns dies doch wirklich kaum für möglich halten. Aber so etwas ist möglich – und die genannte Aufgabe hat sogar eine einzige Lösung. Wir würden Ihnen nachdrücklich empfehlen, diese zu entdecken, falls Sie nur über die nötige Zeit dazu verfügen. Sie werden ganz sicher diese einzige Antwort früher oder auch später selbst entdecken, aber nicht blitzschnell und wahrscheinlich auch nicht in zehn Minuten. Sie werden aber die dafür verwendete Zeit nach dem Erfolg kaum oder nie bereuen. Kein Wunder, denn das ist eine aus dem ernsthaften Sankt-Petersburgischen Wettbewerb entnommene Aufgabe.

Dass eine Aufgabe, die weniger als 15 Wörter enthält, auch in einem sehr angesehenen Wettbewerb angeboten werden kann, zeigt auch die Aufgabe 1 der 1. Runde im Bundeswettbewerb Mathematik 2006:

Man finde zwei aufeinanderfolgende positive ganze Zahlen,
deren Quersummen beide durch 2006 teilbar sind.
Man kann dasselbe auch bezüglich der heurigen Jahreszahl 2009 fragen.

Probieren geht über Studieren.

Wesentliches in der Kürze darstellen zu können, verbindet Mathematik und die Kunst der Poesie. Man könnte mit Recht sagen, dass jeder Inhalt, der sich wirklich nur sehr schwer kürzer fassen lässt, grundsätzlich immer etwas von poetischer Natur in sich birgt.

Es wäre an dieser Stelle sehr interessant zu wissen, wie viele mathematische Gedichte es in den verschiedenen Sprachen gibt. Es scheint, dass gerade auf diesem Gebiet manche Bewegung zu erwarten ist. In der Vergangenheit sind viele Kunstwerke geschaffen worden, heute aber sieht es oft so aus, als ob mathematische Erziehung und poetische Kunst in verschiedenen Ebenen verblieben sind. Dazu gibt es auch psychologische Gründe – was der eine gerne hat, mag der andere nicht leiden. Sogar einfache vernünftige Gedichte über Zahlen gibt es in den mir zugänglichen Sprachen recht wenig oder nicht allzuviele.

Mathematik widerspiegelt vor allem die Vollkommenheit von Inhalt und die Poesie befasst sich oft sehr erfolgreich mit der Perfektion von Form. Die Verbindung von beiden wäre eine sehr schöne und ebenso schwere Aufgabe, eine für die mathematische Ausbildung sich lohnende wichtige Empfehlung. Jegliche Versuche in diese Richtung sind nicht leicht, alleine schon wegen der engen Spezialisierung von heute, aber solche Versuche sind nur zu begrüßen.

An dieser Stelle möchte ich erneut meinen Dank an Bernhard Brockmann aussprechen, der immer wieder mich und meine aus der Ferne in der von mir geliebten deutschen Sprache verfassten Texte betreut.