

Jörg Erik KINNER, Osnabrück

Kognitive Strukturen mathematisch begabter Kinder

Prädikative und funktionale kognitive Strukturen konzeptualisieren individuelle Stilunterschiede im Kontext mathematischer Problembearbeitungen. Obgleich keine der Strukturen der anderen per se überlegen ist, konnte – zumindest für eine Gruppe von 23 mathematisch potentiell begabten Kindern der Klassen 5 bis 7 –, ein Zusammenhang zwischen der Tendenz zum funktionalen Denken einerseits und spezifischen basalen Fähigkeiten andererseits nachgewiesen werden.

1. Prädikative versus funktionale kognitive Strukturen

Kognitive Strukturen, anders als kognitive Fähigkeiten, fokussieren auf Differenzen in der Art der Informationsverarbeitung. Während kognitive Fähigkeiten individuelle Leistungsunterschiede erfassen, konzeptualisieren kognitive Strukturen Präferenzen in der Art und Weise des Denkens, sie repräsentieren stabile, persönliche Vorlieben für mentale Modelle.

Das Gegensatzpaar prädikativer versus funktionaler Strukturen wurde von SCHWANK als bedeutendes Instrument mathematikdidaktischer Forschung etabliert (SCHWANK 1992). Während sich das funktionale Denken an Handlungen und Wirkungen orientiert, verbunden mit einem Verketteten und Verschachteln von Prozessen, fundiert prädikatives Denken auf Relationen zwischen Objekten, verbunden mit dem Herstellen von Struktur und Ordnung (SCHWANK 1999).

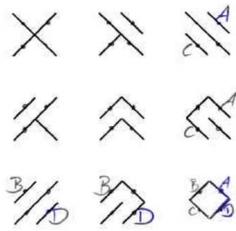
Frühere Studien haben nicht nur mittels Blickbewegungsanalyse und EEG die Existenz dieser kognitiven Strukturen nachgewiesen (ARMBRUST 2006, MÖLLE ET AL. 2000), sondern auch deren Relevanz in disparaten mathematischen Kontexten eindrücklich belegt (HEFENDEHL-HEBEKER 2003, KAUNE 2007). Gleichwohl legte SCHWANK mit der Entwicklung des *Qualitativen Diagnoseinstruments für prädikatives versus funktionales Denken (QuaDiPF)* die Grundlage, unabhängig von spezifischen mathematischen Inhalten individuelle Denkstrukturen nachweisen zu können (SCHWANK 1998).

QuaDiPF-Aufgaben sind figurale Musterergänzungsaufgaben, bei denen das untere, rechte Element einer 3x3-Matrix sowie eine zum Lösungselement passende Begründung anzugeben sind. Als Beispiel sei Item G3 betrachtet, siehe rechts.

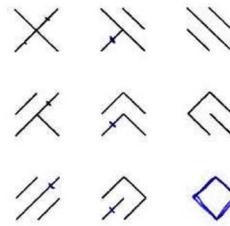


Prädikative wie auch funktionale Ansätze führen hier häufig zu einem „Diamanten“, einem auf der Spitze stehenden Quadrat, als Lösungsfigur.





AC richten sich nach der
Spalte
DB nach der Reihe



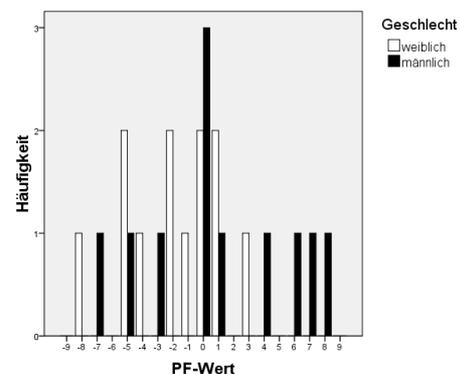
Bei den ersten Figuren in den Reihen
wird immer die Linie rechts oben
nach links um 90° gedreht. Bei den
zweiten Figuren wird die Linie
links unten um 90° nach links
gedreht.

Wie allerdings den abgebildeten Lösungsversuchen zu entnehmen ist, lässt eine Analyse der Begründungen deutliche Unterschiede sichtbar werden. Beide Lösungen stammen von mathematisch potentiell begabten Kindern der Jahrgangsstufe 6. Während auf der linken Seite die Betonung der Invarianz entlang Reihen bzw. Spalten eine prädikative Sichtweise indiziert, ist auf der rechten Seite die vornehmliche Orientierung an Handlungen (in diesem Fall: Drehungen) als offenkundig funktional zu identifizieren.

2. Der PF-Wert als Index prädikativen versus funktionalen Denkens

Die Bearbeitung einer einzigen QuaDiPF-Aufgabe erlaubt kein hinreichend zuverlässiges Urteil über die zugrunde liegende kognitive Struktur. Darüber hinaus ist eine graduelle Skala, die etwa eine sehr stark ausgeprägte funktionale Struktur von einer nur schwach ausgeprägten zu unterscheiden vermag, auf Grundlage bloß einer Aufgabe schlechthin nicht zu konstruieren.

Aus diesem Grund wurde ein Satz von insgesamt zwölf QuaDiPF-Aufgaben zusammengestellt; acht vielfach bewährten sowie vier neu entwickelten. Je Proband und Aufgabe findet eine Beurteilung der Bearbeitung als *prädikativ orientiert* (Punktwert -1), *funktional orientiert* (Punktwert +1) oder *inkonklusiv* (Punktwert 0) statt (bei willkürlich festgelegtem Vorzeichen). Zwölf Aufgaben ergeben bei Addition der Punktwerte schließlich einen *PF-Wert* zwischen -12 und +12; während ein betragsmäßig hoher negativer Wert eine stark ausgeprägte prädikative kognitive Struktur indiziert, weist ein betragsmäßig hoher positiver Wert auf eine stark ausgeprägte funktionale Struktur hin. Ein Wert von 0 ist als indifferent zu werten.



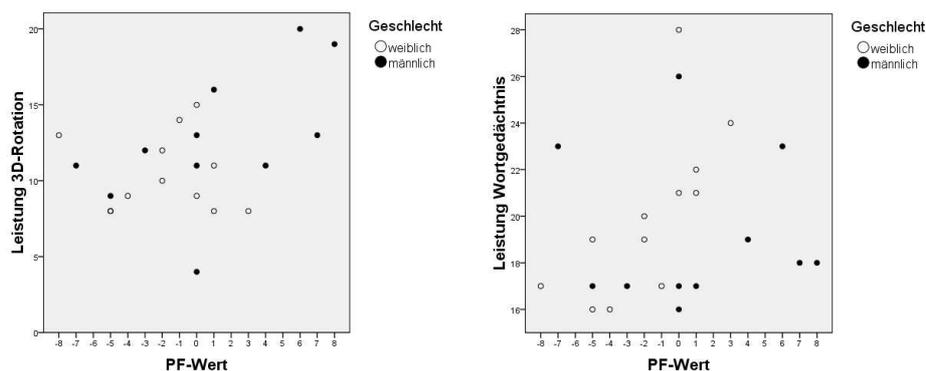
Die PF-Werte der Kinder, 12 Mädchen und 11 Jungen, variieren zwischen -8 und +8. Wie dem vorangehenden Diagramm ferner zu entnehmen ist, tendieren weibliche Probanden eher zum prädikativen Denken, während männliche häufiger eine funktionale Struktur offenbaren. Diese geschlechtsspezifische Verteilung geht wesentlich konform mit früheren Ergebnissen (SCHWANK 1992).

3. Testverfahren zur Erfassung basaler Leistungsdimensionen

In der Erwartung, einen Zusammenhang zwischen dem PF-Wert einerseits und spezifischen basalen Fähigkeiten andererseits nachzuweisen, wurden vier Testformate ausgewählt, die in psychologischen Studien reproduzierbar Geschlechtsunterschiede im Leistungsniveau offenbaren: Während ein Test zur mentalen Rotation dreidimensionaler Körper (nach VANDENBERG & KUSE) wie auch zum mentalen Papierfalten (Aufgabenformat des *Differential Aptitude Test*) im Durchschnitt eine Überlegenheit zugunsten männlicher Probanden ergeben, sind bei einem Test zum Ortsgedächtnis (nach SILVERMAN & EALS) wie auch zum Wortgedächtnis (Aufgabenformat des *Verbalen Lern- und Merkfähigkeitstests*) weibliche Probanden regelmäßig überlegen.

4. Korrelationen zwischen PF-Wert und basalen Leistungsdimensionen

Die Ergebnisse der Kinder im Rahmen der Testbatterie entsprechen tendenziell den Erwartungen. So erreichen beispielsweise die Jungen durchschnittlich höhere Werte im mentalen Rotieren als die Mädchen. Gleichwohl steht vor allem die Korrelation zwischen dem PF-Wert auf der einen Seite und der jeweiligen Testleistung auf der anderen Seite im Fokus des Interesses, vergleiche die exemplarisch abgebildeten Streudiagramme.



Mentale Rotation: Eine Analyse mit SPSS liefert einen Korrelationskoeffizienten nach Pearson von $r=.453^*$ (Signifikanz $p=.015$ einseitig) zwischen dem PF-Wert und der Testleistung beim mentalen Rotieren. Um der Gefahr einer bloßen Scheinkorrelation zu begegnen, wurde das Geschlecht zudem als Kontrollvariable definiert; auch bei partieller Korrelation ergibt

sich weiterhin eine praktisch bedeutsame Korrelation von $r=.390^*$ (Signifikanz $p=.036$ einseitig).

Wortgedächtnis: Eine Korrelationsanalyse der Gesamtpopulation liefert kein statistisch signifikantes Ergebnis. Beschränkt auf die Subgruppe der Mädchen allerdings folgt ein Korrelationskoeffizient nach Pearson von beachtlichen $r=.691^*$ (Signifikanz $p=.013$ zweiseitig) zwischen dem PF-Wert und der Testleistung. Die Beschränkung auf die Subgruppe der Jungen führt zu keinem statistisch signifikanten Ergebnis.

Ortsgedächtnis und mentales Papierfalten: Es besteht keine signifikante Korrelation zwischen PF-Wert und jeweiliger Testleistung.

Zumindest bei der dieser Untersuchung zugrunde liegenden Gruppe mathematisch potentiell begabter Kinder konnte also statistisch signifikant nachgewiesen werden, dass eine stärkere Ausprägung zum funktionalen Denken einhergeht mit einer gesteigerten Fähigkeit, dreidimensionale Körper mental zu rotieren, und, zumindest in der Subgruppe der Mädchen, auch mit einer gesteigerten Leistung im Einsatz des Wortgedächtnisses.

Während eine theoretische Begründung des ersten Befunds naheliegt – mentales Rotieren kann von einer handlungsorientierten, funktionalen Sichtweise profitieren –, erfordert das Ergebnis zum Wortgedächtnis weitere Studien. Vornehmlich aber scheint es geboten, die erhaltenen Resultate zum Rotieren wie auch zum Wortgedächtnis bei mathematisch weniger begabten Probanden zu validieren; eine Verallgemeinerung scheint denkbar.

Literatur

Armbrust, S. *Die Werkzeuge „CoDyLa“ und „QuaDiPF-Eye“ zur Untersuchung funktionalen / prädikativen Denkens sowie ihre empirische Erprobung*. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 2006.

Hefendehl-Hebeker, L. Didaktik der Mathematik als Wissenschaft – Aufgaben, Chancen, Profile. In *Jahresbericht der DMV 105-1 (2003)*, S. 3-29.

Kaune, C. „Der denkt irgendwie anders als ich“ – Spuren kognitiver Strukturen in Schüleräußerungen. In *Praxis der Mathematik in der Schule 15 (2007)*, S. 23-29.

Möller, M., Schwank, I., Marshall, L., Klöhn, A., Born, J. Dimensional complexity and power spectral measures of the EEG during functional versus predicative problem solving. In *Brain and Cognition 44-3 (2000)*, S. 547-563.

Schwank, I. *Kognitive Strukturen algorithmischen Denkens*. Osnabrück, 1992.

Schwank, I. *Qualitatives Diagnoseinstrument für prädikatives versus funktionales Denken – Testheft Version C*. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 1998.

Schwank, I. On predicative versus functional cognitive structures. In *European research in mathematics education I,II*, S. 84-96. Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik e.V., Osnabrück, 1999.