Julian KRUMSDORF, Münster

Beispielgebundenes Beweisen

Solange SchülerInnen formale (allgemeingültige) Aussagen noch nicht formell (formalisiert) beweisen können, mag man sie diese beispielgebunden beweisen lassen – in einigen Schulbüchern der Sekundarstufe I werden etwa „beispielgebundene Beweise" geführt und von den SchülerInnen gefordert. Dabei ist die Rede vom beispielgebundenen Beweisen paradox: Wie kann ein Beweis mit dem Anspruch auf Allgemeingültigkeit an ein Beispiel gebunden sein? In Interviews mit SchülerInnen der Primar- und Sekundarstufe wird untersucht, wie sie ihre deduktiven Schlüsse allmählich von den Besonderheiten der Beispiele lösen. Das beispielgebundene Beweisen erscheint als changierender Prozess zwischen Latenz, subjektiver Realisierung und sprachlicher Manifestation einer allgemeinen Begründung.

1. Forschungsstand

Als eine grundlegende Differenz zwischen verschiedenen Beweisen nennt Hanna (1989) die Unterscheidung zwischen *proofs that prove* und *proofs that explain*, d.h. sie unterscheidet zwischen Beweisen, die eine bestimmte Behauptung verifizieren und Beweisen, die dabei auch erklären, warum eine bestimmte Behauptung gilt. Als Tätigkeit des *proving why* verlange dies im Mathematikunterricht auch das Einbeziehen nicht-formeller Ausdrucksweisen im Beweisen auf Seiten der SchülerInnen.

Um zu analysieren, wie mathematisches Verstehen beim nicht-formellen Beweisen im Mathematikunterricht gefördert werden kann, ist man in der einschlägigen Literatur dazu übergegangen, verschiedene Beweisarten in Abgrenzung zu formellen Beweisdarstellungen zu betrachten. So spricht Neubrand (1990) beim Beweisen in der figuralen Arithmetik von einem *Beweisen durch Hinschauen*, während Wittmann/Müller (1988) das *inhaltlich-anschauliche Beweisen* und Blum/Kirsch (1989) das *präformale Beweisen* diskutieren. Wittmann/Ziegenbalg (2004) betonen das Moment der Versprachlichung in den so genannten *operativen Beweisen*.

Balacheff (1989) nennt das *generic example*, das die Gründe für die Wahrheit einer Behauptung soweit erkennen lässt, dass es als ein charakteristischer Repräsentant für eine ganze Klasse von Beispielen gesehen werden könne. Von Freudenthal (1978) entlehnt ist der Begriff der *paradigmatischen* Begründung, die, an einem ausgewählten Referenzbeispiel geführt, auf weitere Instanzen anwendbar und in diesem Sinne allgemeingültig sei.

2. Forschungsgegenstand

Man kann unter beispielgebundenem Beweisen vordergründig ein induktives Prüfen (Bestätigen) einer behaupteten Aussage verstehen; dabei wird die Richtigkeit der Behauptung nur in einem oder mehreren Beispielen bestätigt – darin kann jedoch auch eine allgemeine Begründung für das, was allen Beispielen gemein ist, gesehen werden. Im Sinne von Oevermann (1979) kann diese allgemeine Begründung dabei als latente Sinnstruktur verstanden werden, die von den SchülerInnen erst noch kognitiv realisiert werden muss und sich ggf. in ihren sprachlichen Äußerungen manifestiert. Wenn den SchülerInnen bewusst wird, dass ihre deduktiven Schlüsse an den Beispielen unabhängig sind von den Besonderheiten der Beispiele, kann man sagen, dass sie einen beispielgebundenen Beweis führen. Manifest wird der beispielgebundene Beweis allerdings erst in seiner Entäußerung, etwa im Diskurs.

Unter Zuhilfenahme argumentativer und logischer Begriffe von Toulmin und Peirce – siehe etwa Schwarzkopf (2000) und Meyer (2007) – kann das beispielgebundene Beweisen schärfer gefasst werden und seine Beziehungen zum induktiven Prüfen einerseits und zum formellen Beweisen andererseits geklärt werden.

3. Empirischer Rahmen

Bisher sind etwa 60 GymnasialschülerInnen und Grundschulkinder zum beispielgebundenen Beweisen herausgefordert und darin interviewt worden. Die hierzu gewählten Behauptungen standen im Zusammenhang mit dem gegensinnigen Verändern bzgl. der Addition, dem Winkelsummensatz im konvexen n-Eck, der Anzahl von Verbindungsstrecken in einem „vollständigen Graphen“, einer Spezialisierung des Umfangswinkelsatz, dem Satz des Thales, den Potenzgesetzen und den Potenzfunktionen. Diese Themen waren für die SchülerInnen in den Interviews in der Regel noch unbekannter Stoff, so dass die SchülerInnen die Behauptung vor ihrer Begründung oft erst noch entdecken und ggf. prüfen mussten.

Es werden halbstandardisierte Einzelinterviews in jeweils einer Schulstunde geführt und auf Video aufgezeichnet. Der Interviewer übernimmt beim Einstieg in das Thema noch die Rolle eines Lehrers, dann aber verstärkt die Rolle eines Interviewers, Mitschülers oder Zweiflers (advocatus diaboli), der Begründungen herauszufordern sucht.

Folgende Fragen sind u.a. von Interesse: Haben die SchülerInnen selbst den Anspruch, über induktive Prüfungen hinaus eine Behauptung zu beweisen? Realisieren die SchülerInnen den latenten (allgemeinen) Beweis an Beispielen? An welchen Indizien kann festgestellt werden, dass SchülerInnen einen beispielgebundenen Beweis führen? Welche Beweisschritte manifestieren sich, welche bleiben latent? Gibt es allgemeine Merkmale von Aufgabenstellungen oder dialogische Mittel der Gesprächsführung durch den Interviewer, die den SchülerInnen das beispielgebundene Beweisen erleichtern? Was kann SchülerInnen davon abhalten, beispielgebunden zu argumentieren?

4. Bisherige empirische Ergebnisse

Die empirische Erfahrung Goldbergs (1992), nach der alle SchülerInnen in einer 7. Klasse durch Arbeit an hinreichend vielen Beispielen beispielgebunden begründen konnten, hat sich bei den Schülerexperimenten weniger bestätigt. Aus der Analyse der Interviews können vielmehr theoretische Erklärungen dafür gewonnen werden, dass viele Beispiele die SchülerInnen gerade vom beispielgebundenen Beweisen abhalten können. Argumentieren SchülerInnen hingegen an bedingt vorstellbaren Beispielen, löst sich ihre Argumentation von konkreten Beispielen tendenziell zum allgemein Vorstellbaren und ggf. Begründbaren ab.

In den jüngeren Jahrgängen scheint das Beweisen noch stark in einen sozialen Rahmen eingebettet zu sein („Erst wenn der Lehrer das sagt, glaub' ich das.“) Schließlich tritt das Problem der Versprachlichung allgemein gedachter Zusammenhänge im Rahmen der normalen Sprachentwicklung der SchülerInnen dort auf, wo formelle Sprache fehlt oder nicht vorgegeben ist. Im Vergleich zum formellen Beweisen ist die Beherrschung der mathematischen Fachsprache weniger notwendig, jedoch fällt es einigen Schülern nicht leicht, kreativ und versiert die Umgangssprache beim beispielgebundenen Beweisen zu nutzen.

Bei den bisherigen Schülerexperimenten zeigte sich, dass für die SchülerInnen eine Vorübung im beispielgebundenen Beweisen hilfreich ist, um sie Erfahrungen in dieser besonderen Art des Beweisens sammeln zu lassen. Es konnte ferner beobachtet werden, dass zu viele Hilfsmittel wie Taschenrechner oder Messwerkzeuge dem (beispielgebundenen) Beweisen eher abträglich zu sein scheinen, da die SchülerInnen dann möglicherweise dem induktiven Prüfen verhaftet bleiben. Manche Schüler scheinen ein induktives Vorgehen auch dann schon als ausreichende Begründung der Behauptung anzusehen. Einige SchülerInnen wenden überdies die Behauptung als Regel final an, d.h. die Aufforderung zur Begründung einer Behauptung veranlasst sie dazu, *mit* der Behauptung etwas zu begründen.

Den bisherigen empirischen Beobachtungen nach scheint das beispielgebundene Beweisen eher ein changierender Prozess zu sein, in dem sich die SchülerInnen an der Front ihres Wissens und im Übergang zwischen induktivem Prüfen und formellem Beweisen bewegen. Die Begründungen für einige Beweisschritte können dabei latent bleiben und müssen durch die SchülerInnen nicht kognitiv realisiert werden, während sich andere Beweisschritte mehr oder weniger manifestieren. Es kommt auch vor, dass SchülerInnen während des beispielgebundenen Beweisens oder im Anschluss daran noch zu induktiven Prüfungen im Sinne einer zusätzlichen Bestätigung greifen oder die Grenzen ihrer Verallgemeinerungen erproben.

Literatur

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In Pimm, D. (Hrsg.): *Mathematics, Teachers and Children* (S. 216 - 233). London: Hodder and Stoughton.

Blum, W. & Kirsch, A. (1989): Warum haben nicht-triviale Lösungen von f' = f keine Nullstellen? Beobachten und Bemerkungen zum „inhaltlich-anschaulichen Beweisen" (S. 193 - 209). In Kautschitsch, H. & Metzler, W. (Hrsg.): *Anschauliches Beweisen*, Wien: hpt. [Erweiterte englische Fassung in: Educational Studies in Mathematics 22 (1991), vol. 2, 183 - 203.]

Freudenthal, H. (1978): *Vorrede zu einer Wissenschaft vom Mathematikunterricht.* München: Oldenbourg.

Goldberg, E. (1992): Beweisen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. Ergebnisse - Schwierigkeiten - Möglichkeiten. In *MU – Der Mathematikunterricht, 6*, 33 - 46.

Hanna, G. (1989): Proofs that prove and proofs that explain. *Proceedings of the 13th International Group for the Psychology of Mathematical Education, vol. 2,* 45 - 51.

Meyer, M. (2007): *Entdecken und Begründen im Mathematikunterricht. Von der Abduktion zum Argument.* Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, M. (1990): *Einführung in die Arithmetik: ein Arbeitsbuch für Studierende des Lehramts.* Bad Salzdetfurth: Franzbecker.

Oevermann, U., Allert, T., Konau, E. & Krambeck, J. (1979): Die Methodologie einer "objektiven Hermeneutik" und ihre allgemeine forschungslogische Bedeutung in den Sozialwissenschaften (S. 352 - 434). In Soeffner, H. (Hrsg.): *Interpretative Verfahren in den Sozial- und Textwissenschaften*. Stuttgart: Metzler.

Schwarzkopf, R. (2000): *Argumentationsprozesse im Mathematikunterricht – Theoretische Grundlagen und Fallstudien***.** Hildesheim: Franzbecker.

Wittmann, E. & Müller, G. (1988): Wann ist ein Beweis ein Beweis? (S. 113 - 145). In Bender, P. (Hrsg.): *Mathematikdidaktik: Theorie und Praxis, Festschrift für Heinrich Winter*. Berlin: Cornelsen.

Wittmann, E. & Ziegenbalg, J. (2004): Sich Zahl und Zahl hochhangeln (1.2). In Müller, G., Steinbring, H., Wittmann, E. (Hrsg.): *Arithmetik als Prozess*. Seelze: Kallmeyer.