

Carla MERSCHMEYER-BRÜWER, Braunschweig

Die Bedeutung von geometrischen und arithmetischen Vorstellungen für das Mathematiklernen von Grundschulkindern

1. Beziehungen zwischen geometrischen und arithmetischen Vorstellungen

Schon in einer sehr frühen Phase ihrer Entwicklung machen Kinder am eigenen Körper erste Erfahrungen über den Zusammenhang von Struktur und Anzahl. Damit werden erste mentale arithmetische und geometrische Vorstellungen ausgebildet und miteinander verknüpft. Kinder „begreifen“ beispielsweise, dass sie 10 Finger haben, und zwar an jeder Hand fünf Finger. Dazu müssen sie die Anordnung ihrer Finger als geometrische Struktur erfassen müssen, um diese sodann zu untergliedern und in ihrer Anzahl zu bestimmen. Solche Prozesse umfassen räumliches Strukturieren. Die geometrischen Vorstellungen bei räumlichen Strukturierungsprozessen werden wesentlich bestimmt durch die Bildung komplexer Einheiten, durch Tiefendecodierung und durch Strukturierungscoordination. Die zugehörigen arithmetischen Vorstellungen sind durch Simultan- und Quasi-Simultanerfassung und durch begleitende Rechenoperationen charakterisiert (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2002).

2. Förderung geometrischer und arithmetischer Vorstellungen

Im mathematischen Anfangsunterricht der Grundschule nimmt man auf die Finger an den eigenen Händen Bezug, um einen Zahlbegriff für die ersten natürlichen Zahlen bis 10 sowie ein Verständnis für erste Rechenoperationen zu fördern.

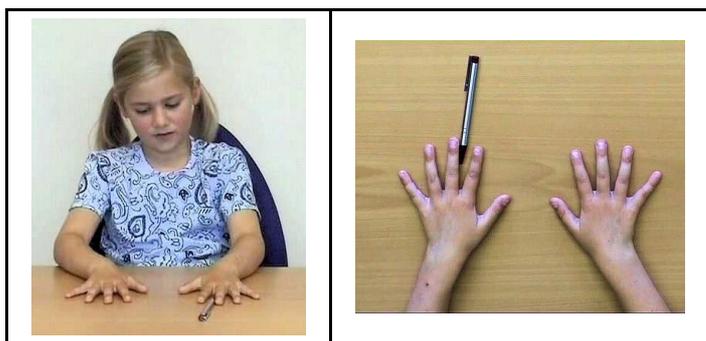


Abb. 1: Mit einem Kind wird die Zahlzerlegung der 10 an den eigenen Fingern geübt, indem mit einem Stift die Finger untergliedert werden. Auf diese Weise kann das Kind so z. B. die Zerlegung $3+7=10$ identifizieren.

Diese Aspekte von geometrischer Struktur und arithmetischem Begriff von Anzahl lassen sich besonders gut durch ein Aufgabenformat zu Schräg-

bildern von Würfelkonfigurationen fördern. Deshalb wurde dazu eine Lernumgebung entwickelt (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2005). Dieses klassische Aufgabenformat wurde in seinen Anforderungen an die geometrischen und arithmetischen mentalen Vorstellungen systematisch differenziert (vgl. Abb. 2).

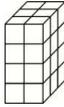
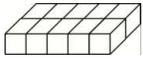
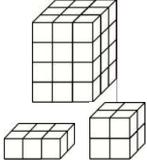
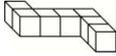
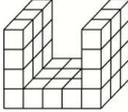
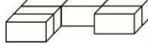
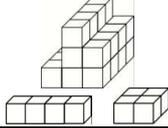
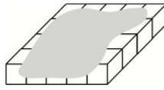
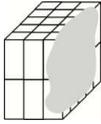
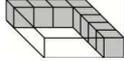
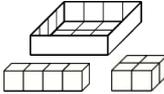
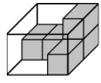
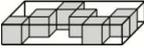
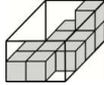
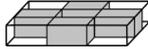
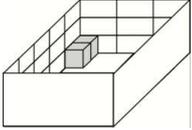
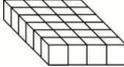
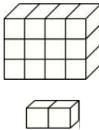
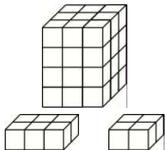
Variation des Aufgabenformats	FE I	FE II	FE III	FE IV
	Einschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfel strukturieren	Einschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren	Mehrschichtige Würfelbauwerke in Würfelmehrlinge strukturieren
FB 1 Quader strukturieren				
FB 2 Nicht-konvexe zu einem Quader ergänzen				
FB 3 Unvollständig dargestellte Quader erfassen				
FB 4 Quader ausfüllen mit direkt konstruierbaren Kantenlängen				
FB 5 Quader ausfüllen mit rekonstruierbaren Kantenlängen				
FB 6 Quadervolumen verdoppeln und alternative Maße ermitteln				

Abb. 2: Konzeption und Differenzierung des Aufgabeformats „Aus wie vielen Bausteinen besteht die Anordnung?“

Dabei fordert die bildliche Darstellung in unterschiedlichem Maße die geometrischen Vorstellungen hinsichtlich der Komplexität der zu bildenden Einheiten, hinsichtlich der Tiefendecodierung und hinsichtlich der räumlichen Koordination gebildeter Einheiten heraus. Auf diese individuell ausgeprägten geometrischen Vorstellungen müssen die arithmetischen Vorstellungen adäquat abgestimmt sein. Die Anzahlerfassung, d. h. ob Würfel einzeln registriert oder umfangreichere Würfelanordnungen simultan er-

fasst werden, und die Rechenoperationen – schrittweises Zählen, Addieren oder Multiplizieren – werden durch die Strukturierungsschritte und damit durch die entsprechenden geometrischen Vorstellungen determiniert.

Bei der hier vorgestellten Lernumgebung werden zwei verschiedene Aufgabenkontexte vorgegeben: 1. Würfelbauwerke untergliedern und bauen und 2. Schachteln füllen (vgl. Merschmeyer-Brüwer 2007). Daraus leiten sich variierende Aufgabenformate ab, die an folgenden Leitfragen mit Bezug zur Volumenbestimmung orientiert sind: „Aus wie vielen Bausteinen besteht das Bauwerk?“ und „Wie viele Bausteine passen insgesamt in die Schachtel hinein?“. In der hier dargestellten Lernumgebung gibt es insgesamt vier verschiedenen Fördereinheiten (FE), die ihrerseits jeweils sechs Förderbausteine (FB) umfassen (vgl. Abb. 2). Die Fördereinheiten sind hierarchisch nach der Komplexität der von den Kindern zu strukturierenden Würfelbauwerke und nach der Komplexität der dabei zu wählenden Strukturierungseinheit abgestuft. Die Förderbausteine variieren das Aufgabenformat nach dem Anspruch an die mentale Vorstellung hinsichtlich der im Bild erkennbaren strukturellen Vorgaben.

3. Von Handlungen zu mentalen Vorstellungen

Räumliche Strukturen erschließen sich einem Kind nicht automatisch, sondern müssen aktiv durch Deutungsprozesse konstruiert werden. In der erprobten Lernumgebung gibt es deshalb jeweils drei verschiedene Handlungsaktivitäten: 1. *konkretes Handeln* in Form von Bauen und Zerlegen von Bauwerken aus Bausteinen, 2. *Argumentieren* sowie 3. *mentales Analysieren*.

Die Kinder werden zunächst aufgefordert, die Aufgabenstellungen zunächst rein gedanklich in ihrer Anschauung (d. h. hier konkret in ihrer räumlichen Vorstellung) zu lösen (mental-analytisch, vgl. Abb. 3): „Vermute!“ Eine solche Vermutung können die Kinder sich dann gegenseitig argumentativ oder enaktiv begründen. Durch diese Variation der Artikulationsmöglichkeiten können sich die Kinder zunehmend von der Erarbeitung ihrer Lösung durch konkretes Handeln mit dem Material lösen und eine räumliche Strukturierungsaufgabe mehr oder weniger mental analysieren. Die Handlung soll im Idealfall nur noch der Kontrolle bzw. der kommunikativen Verdeutlichung der eigenen vorher angestellten Überlegungen zur Lösung der Problemstellung dienen.

Beim Vergleich zwischen Annahme und gebauter Objektanordnung verbessern die Kinder ihre geometrischen Vorstellungsfähigkeiten und ihr Verständnis für die Erfassung der Anzahl. Aus den Diskrepanzen zwischen durch mentale Analyse vermutete und durch Handeln erworbene Antwort-

ten ergeben sich kognitive Konflikte. Damit wird die Aufmerksamkeit des Kindes stärker auf sein Denken als auf sein Handeln gerichtet. Bei diesem kindlichen Lernprozess wird deshalb die mentale Vorstellung zunehmend gefordert und so die Beziehung zwischen der geometrischen und arithmetischen Vorstellung abstrahiert.

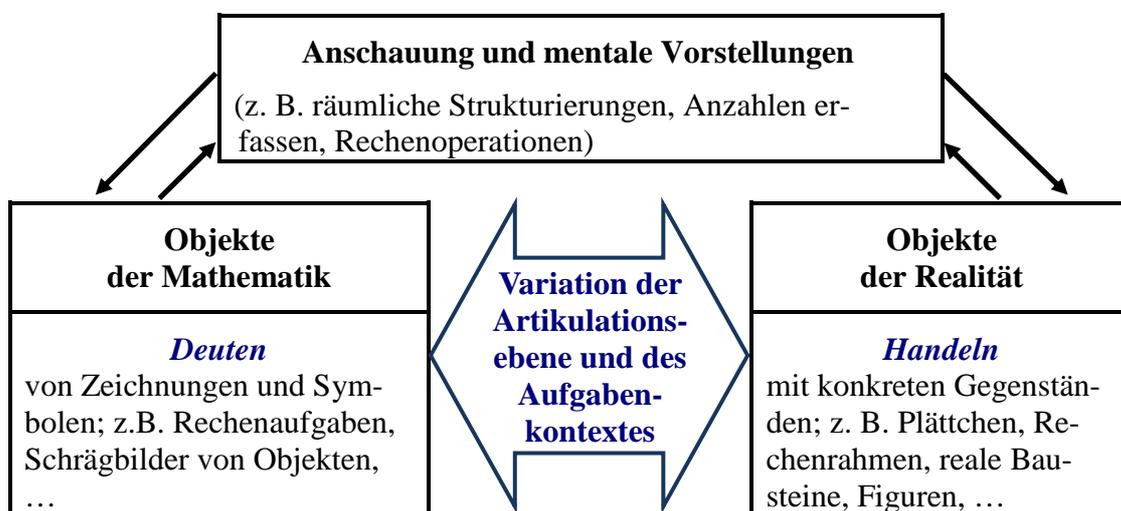


Abb. 3: Bedeutung der Anschauung als Mittler zwischen Mathematik und Realität

4. Bedeutung für das Mathematiklernen

Inhaltliche und konzeptionell trägt diese Lernumgebung dazu bei, mentale Vorstellungen zu Mustern bei den Kindern zu fördern. Eine wesentliche Erkenntnis besteht darin, dass die geometrischen Vorstellungen die Ausprägung und damit weitere Entwicklung der arithmetischen Vorstellungen bedingen. Deshalb sind Aufgabenformate, die diese Vorstellungen in ihrem Beziehungsgefüge bei Kindern herausfordern, mit Blick auf das Weiterlernen in der Geometrie wie auch der Algebra fundamental bedeutsam.

Literatur

- Merschmeyer-Brüwer, C. (2002). Räumliche Strukturierungsweisen bei Grundschulkindern zu Bildern von Würfelkonfigurationen – Augenbewegungen als Indikatoren für mentale Prozesse. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 23 (1), 28-50.
- Merschmeyer-Brüwer (2005). Räumliche Strukturen „begreifen“ – Fördermöglichkeiten in der Grundschule?! In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker.
- Merschmeyer-Brüwer (2006). „Ich habe erst diese Würfel gezählt und dann immer zwei dazu getan.“ – Zum Zusammenhang von räumlichem Vorstellungsvermögen und Rechenfertigkeiten bei der Strukturierung von Würfelbauwerken. *Beiträge zum Mathematikunterricht*. Hildesheim: Franzbecker, 367-370.
- Merschmeyer-Brüwer, C. (2007). Räumliche Strukturen „begreifen“. Prozessbezogene Kompetenzen entwickeln. *Die Grundschulzeitschrift*, Heft 201, Jg. 21, S. 42-50.