Marco MEYER, Engelbert NIEHAUS, Koblenz-Landau

Geographie und Mathematik: Räumliche Logik in Geoinformationssystemen

Räumliche Probleme aus der Geographie bieten zahlreiche Ansatzpunkte zur mathematischen Modellbildung, die die Bereiche der Geometrie, der Algebra, der Statistik und der Analysis für die Problemlösung nutzen. Räumliche Probleme können über die Analyse von gesammelten Daten in Geoinformationssystemen (GIS) gelöst werden. Dabei werden gesammelten Daten spezifische Raumkoordinaten oder auch Flächen zugeordnet. Mathematische Modelle werden in geographischen Anwendungen genutzt, um diese Datensätze auszuwerten. Vorgestellt werden spezielle Aspekte räumlicher Logik, die die Gültigkeit von Aussagen für bestimmte Raumkoordinaten nutzt. Deren Gültigkeit kann mit Hilfe von Computeralgebrasystemen (CAS) im Raum veranschaulicht werden.

1. Geoinformationssysteme und mathematische Modellbildung

Ein Geoinformationssystem (GIS) ist ein rechnergestütztes System, welches aus Hardware, Software, Daten und Anwendungen besteht. Mit diesem können Daten digital erfasst, gespeichert, reorganisiert und räumlich analysiert, sowie auf diverse Arten ausgegeben und graphisch dargestellt werden.

Solche Daten können als Flächeninformationen oder auch als Punktinformationen vorliegen. Bei Flächeninformationen ist es kein Problem vorliegenden Informationen über bestimme Punkte in diesem Gebiet zu erhalten, da allen Punkten dieser Fläche, das entsprechende Attribut zugewiesen wurde. Im Gegensatz dazu ist es bei Punktinformationen nicht ohne weiteres möglich, Aussagen über das umliegende Gebiet zu erhalten.

Hierzu bedient man sich der Interpolation als mathematisches Hilfsmittel, um diese diskreten Daten zu verstetigen und um somit Aussagen über umliegende Gebiete zu ermöglichen.

Wichtig ist diese Verstetigung beispielsweise im Rahmen einer Risikobewertung, bei der an bestimmten Punkten ein Risikofaktor aus den gemessenen Werten bestimmt wurde. Mit Hilfe des Modells kann man dann eine Risikokarte für das gesamte Gebiet erstellen.

2. Logik und unscharfe Logik im Raum

In der klassischen Logik, kann man Aussagen den Wert 1 für wahr, bzw. 0 für falsch zuordnen. Im GIS werden Koordinaten in der xy-Ebene Wahrheitswerte als Attribut zugeordnet. Damit ist es möglich auch aussagenlogische Regeln auf diese Attribute im Raum anzuwenden. Es entsteht folgende Funktion:

$$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y) \to f(x,y) \in \{0,1\}$$

Sieht man diese Funktion unter dem Gesichtspunkt der Risikobewertung, so kann man sagen, dass jedem Punkt *(x,y)* ein Risikowert *f(x,y)* zugewiesen wird. Ein Risiko liegt vor, wenn diesen Koordinaten das Attribut 1 zugeordnet wurde (mathematisch ist mit *f* ein aussagenlogisches Prädikat auf $\mathbb{R}^2$ gegeben).

Betrachtet man zum Beispiel Schadstoffe in der Luft oder eine Ozonbelastung im Punkt *(x,y)*, so kann man mit dieser scharfen logischen Struktur nur Aussagen treffen, ob an dem Punkt *(x,y)* ein Grenzwert überschritten wurde (*f(x,y)=1*) oder nicht (*f(x,y)=0*). Graduelle Übergänge in der unmittelbaren Umgebung der risikobehafteten Koordinaten, sind so nicht ohne weiteres zu modellieren.

$$\mu: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \mu(x, y) = z \in [0,1]$$

Geht man jedoch zur unscharfen Logik über, so kann man diese graduellen Übergänge durch ein "Risikogebirge" als Funktionsgraph von *f* mit Hilfe der Interpolation realisieren. Die entstandene Funktion der Form
wird als Zugehörigkeitsfunktion zur entsprechenden Fuzzymenge "hohe Ozonbelastung" gedeutet. Damit ist es nun möglich, für jeden Punkt der *xy*-Ebene einen Zugehörigkeitsgrad zu bestimmen und damit fuzzylogische Folgerung zu erzeugen.

Ein Beispiel für eine solche fuzzylogische Struktur wäre die folgende Regel:

WENN *Ozonbelastung hoch* DANN *Verringere körperliche Arbeit*.

Der linguistische Wert "*Verringere körperliche Arbeit*" wird ebenfalls durch eine Funktion der Form :
$$\gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$l \to \gamma(l) = y \in [0,1]$$

Mathematisch gesehen, erfolgt eine Auswertung dieser Regel über die Funktion:
$$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to g(x, y) = \gamma^{-1}(\mu(x, y)) = l$$

Gilt nun $\mu(x,y) = 0.8$ so erhält man durch die oben genannte Regel einen Zugehörigkeitsgrad zum linguistischen Wert *Verringerung der körplichen Arbeit* von 0.8. Durch Einsetzen dieses Funktionswerts in die Umkehrrelation erhält man dann den zugehörigen Wert. Um diesen Prozentsatz sollte die Arbeit reduziert werden, um kein Gesundheitsrisiko einzugehen.

Schülerinnen und Schülern sollen in diesem Zusammenhang eine solche logische Auswertung räumlich im 3D-Graphen interpretieren können. Für diese Veranschaulichung verwendet man zwei bijektive, streng monotone Funktionen *h* und *j*, die jeweils von den reellen Zahlen in die reellen Zahlen abbilden, da die Umkehrabbildungen existieren und eindeutig sind und man diese sehr gut graphisch veranschaulichen kann. Die Funktion *h* soll dabei die Zugehörigkeitsfunktionen zu dem linuguisten Wert "*Ozonbelastung hoch*" sein, *j* die Zugehörigkeitsfunktion zum Wert "*Verringerung der körperlichen Arbeit*".

Als erstes berechnet man den Funktionswert von *h* an der Stelle *x*. Danach trägt man im Graphen der Funktion *j* diesen Wert ab, indem man eine Parallele zur x-Achse durch den berechneten Wert zeichnet. An der Stelle, an welchem diese Parallele den Graphen der Funktion *j* schneidet, fällt man das Lot auf die *x*-Achse und erhält damit den Wert für die Verringerung.

In der Anwendung erhält man Risikobewertungen im Allgemeinen von Experten, welche diese auch in der oben genannten linguistischen Struktur angeben. Mit Hilfe dieses Verfahrens, ist es möglich, solche unscharfen Aussagen und damit das Expertenwissen, in ein mathematisches Modell zu implementieren.

3. Veranschaulichung von räumlicher Logik mit CAS

Für räumliche Interpretation logischer Zusammenhänge ist es hilfreich, die so entstandene Risikofunktion mit Hilfe eines CAS plotten zu lassen. Das visualisierte Risikogebirge kann nun als zweite Ebene über die ursprüngliche Karte im GIS gelegt werden. So können risikobehaftete Gebiete direkt anhand der Erhebungen abgelesen werden. Jetzt ist es auch Schülerinnen und Schülern möglich ohne große Probleme Informationen aus dem Risikogebirge abzulesen und die vorhandenen Daten in einem 3D-Graphen zu deuten.

So können von den Schülerinnen und Schülern beispielsweise Wege von einem Ort A zu einem Ort B geplant werden, welche nicht durch Gebiete mit hohem Risiko laufen sollen. Die Risikokarten können in diesem Fall wie Landkarten in der Geographie gelesen werden, wobei die dritte Dimension nicht die Höhe über dem Meeresspiegel, sondern das Risiko an diesem Punkt *(x,y)* angibt.

4. Wiki-Inhalte für die Behandlung von räumlicher Logik mit dem CAS Maxima

Eine Verbindung zwischen den Bereichen Geographie und Mathematik stellt die räumliche Logik dar. Die notwendigen mathematischen Werkzeuge für die Abbildung in Geoinformationssystemen findet man nicht in aktuellen Schulbüchern. In einem Wiki können Themen, die in dieser Form nicht Gegenstand der mathematischen Ausbildung sind, bereits als inhaltlicher Prototyp dargestellt werden, die als Startpunkt für mathematische Modellbildung zwischen Geographie und Mathematik verwendet werden können. Dadurch können innovative wissenschaftliche Ansätze bei räumlich-geographischen Problemen in Schulprojekten eingesetzt werden. Dafür ist es notwendig, dass im Wiki eine Anleitung vorgegeben wird, wie die Schülerinnen und Schüler mit einem CAS als

Werkzeug umgehen können, um räumliche Logik zu visualisieren. In dem Wiki werden für die Schülerinnen und Schüler Hilfen gegeben, mit denen sie die Eingabe der Stützstellen umsetzen und mit Maxima die Zugehörigkeitsfunktionen bzw. die Gültigkeit eines linguistischen Wertes in einem geographischen Gebiet veranschaulichen können. Für das Verständnis von mehrdimensionalen Funktionen und das Interpretieren von 3D-Graphen kann die Geographie wiederum als Veranschaulichungshilfe dienen, denn bei Landkarten wird funktional jedem Punkt der Ebene eine Höhe zugeordnet. Ziel der Nutzung des CAS ist es, logische bzw. fuzzy-logische Verknüpfungen in ihren Auswirkungen im Raum zu untersuchen und zu veranschaulichen. Das CAS wird als Instrument zur Visualisierung räumlicher Strukturen verwenden.

5. Fazit

Die Themen Logik und Fuzzy-Logik tauchen im Lehrplan und damit auch in den Schulbüchern nicht auf. Jedoch stellt gerade die Fuzzy-Logik eine Möglichkeit dar, verbale Aussagen und Folgerungen aus dem Alltag mathematisch zu formulieren. Da man die linguistischen Werte durch Zugehörigkeitsfunktionen darstellen kann, gelingt es, die Leitidee L4, Funktionaler Zusammenhang, des Rahmenlehrplans mit einem Problem aus der Realität zu verknüpfen. Durch die Implementierung dieser Regeln in ein GIS, erreicht man einen fächerübergreifenden Aspekt mit der Geographie, welche die Anwendungsprobleme liefert. Durch die graphische Veranschaulichung dieser Fuzzylogischen Folgerungen in einem CAS ist es möglich, dieses Themas auch in den Klassenstufen, denen die analytischen Voraussetzungen zur Bearbeitung dieser Thematik fehlen, zu verwenden, da man diese mehrdimensionale Funktionen als Graph (Landkarte) interpretiert.

6 Literatur

[1] Rahmenlehrplan Mathematik, Klassenstufen 5 – 9/10, Ministerium für Bildung, Wissenschaft, Jugend und Kultur Rheinland-Pfalz (2007)

[2] Lehrplan Mathematik Grund- und Leistungsfach, Ministerium für Bildung, Wissenschaft und Weiterbildung Rheinland-Pfalz (1998)

[3] Nguyen, Hung T., Walker, Elbert A., *A First Course in Fuzzy Logic*, CRC Press Inc., Boca Raton, (1997)

[4] Biewer, Benno, *Fuzzy Methoden*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg (1997)

[5] Meyer, Marco, Niehaus, Engelbert, *Förderung von Schüler(-inne)n mit besonderer mathematischer Begabung am Beispiel der Fuzzy-Theorie*, (2008)

[6] Frey, Karl, *Die Projektmethode*, 10.Auflage, Beltz, Weinheim (1982, 1990, 2005)