

Kathleen PHILIPP, Dominik MATT, Timo LEUDERS, Freiburg

Experimentelles Denken – Vorgehensweisen von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen

Mathematiker formen Vermutungen über mathematische Zusammenhänge nicht etwa durch Ableitung aus bestehenden Sätzen, sondern durch „experimentelles Arbeiten“ mit Beispielen, oder wie es im Rahmen einer mathematiksoziologischen Studie ein Mathematiker äußert:

„Die Großen sind auch deshalb so groß, weil sie so viel wissen. Sie kennen viele Beispiele und haben viel mit ihnen experimentiert. Darüber spricht man nicht. Man schreibt auch nicht in seinem Paper, wie man zu einer Vermutung gekommen ist. Was für immense Rechnungen manchmal dahinter stecken oder wie viele spezielle Beispiele.“ (nach HEINTZ 2000:150f.)

Aus wissenschaftstheoretischer Sicht lässt sich dies gut mit dem epistemologischen Modell von PEIRCE (1965) beschreiben, in dem drei grundsätzlich verschiedenen Formen des Schließens unterschieden werden: Abduktion, Induktion und Deduktion. Die Abduktion bezeichnet den Vorgang, in dem eine erklärende Hypothese gebildet wird. Die Induktion den gegenläufigen Prozess des Hypothesenprüfens am Phänomen bzw. am Beispiel. Deduktives Schließen hat das Ziel, mit logischen Schlussfolgerungen eine Vermutung zu beweisen. Das Hypothesenbilden und Hypothesenprüfen, welches sich in einem konkreten Phänomenbereich an Beispielen vollzieht – nach Peirce also das abduktive und induktive Vorgehen – wird im Folgenden als innermathematisches Experimentieren bezeichnet.

Da streng deduktive Prozesse eine spezifische Stärke der Mathematik als Wissenschaftsdisziplin darstellen, wird ihnen oft eine dominierende Rolle zugesprochen. Bei der Entwicklung mathematischen Denkens bei Kindern spielen jedoch zunächst induktive und abduktive Prozesse eine viel größere Rolle. Diese sollen auch im Zentrum unserer Studie stehen, deren Pilotierungsschritte wir im Folgenden berichten.

Ausgangspunkt unserer Studie ist die Annahme, dass die Untersuchung experimenteller Prozesse gewinnbringend für das Verständnis von Lernprozessen sein kann und dass eine nähere Kenntnis über solche Prozesse die oft formulierte These der prinzipiellen Wesensgleichheit mathematischen Tuns vom Kindesalter bis zur professionellen Forschung stützen kann.

Modelle zum Experimentieren

Das Konzept des Experimentierens wird in der Mathematik eher selten zur Beschreibung des individuellen und kollektiven Erkenntnisgewinns heran-

gezogen, während es in den Naturwissenschaften bereits weitgehend ausgearbeitete konzeptuelle und empirische didaktische Arbeiten gibt. Von herausragender Bedeutung ist hier wohl das Modell des naturwissenschaftlichen Arbeitens als eine Suche in zwei Räumen (SDDS, KLAHR/DUNBAR 1988). Hier wird naturwissenschaftliches Lernen beschrieben als ein Wechsel zwischen einem Hypothesensuchraum, in dem Vermutungen aufgestellt werden und einem Experimentesuchraum, in dem Experimente generiert werden um einerseits Vermutungen zu überprüfen (bzw. zu falsifizieren) und andererseits den Phänomenbereich so zu erkunden, dass wiederum neue Vermutungen aufgestellt werden können. Diese Beschreibung des Experimentierens lässt sich auf die mathematische Domäne übertragen und soll zu einem vertieften Verständnis von induktiven und abduktiven Denkprozessen führen.

Forschungsfragen

Bei der im Folgenden beschriebenen ersten Teilstudie zum innermathematischen Experimentieren beschäftigen wir uns mit drei zentralen Fragen.

- Schwerpunkt unserer Studie ist es, die *Vorgehensweisen* von Schülerinnen und Schülern bei innermathematischen Erkundungen zu beschreiben und dabei Strategien zu identifizieren und zu kategorisieren.
- Begleitend entwickeln wir *Kriterien zur Aufgabenwahl* zum innermathematischen Experimentieren und
- vergleichen systematisch verschiedene *Untersuchungsmethoden* hinsichtlich ihrer Eignung zur Offenlegung der komplexen Bearbeitungsprozesse.

Design der Studie

Aufgrund des theoriegenerierenden Charakters unserer Fragestellung eignete sich in besonderem Maße ein qualitatives Forschungsdesign. Da von beobachteten Vorgehensweisen auf innere Prozesse geschlossen werden sollte, boten sich Videoaufzeichnungen an, um einerseits reale Handlungen und andererseits verbale Äußerungen erfassen zu können, deren Wechselspiel in der Auswertung eine zentrale Rolle spielte.

Die Auswahl der Stichprobe wurde möglichst breit angelegt (Schülerinnen und Schüler der Grundschule sowie Lehramtsstudierende), um einerseits eine möglichst große Vielfalt an Vorgehensweisen beobachten zu können und andererseits im Sinne obenstehender These die Gemeinsamkeiten mathematischen Arbeitens auf unterschiedlicher Expertisestufe zu erkennen. Alle Probanden bearbeiteten dieselben Aufgaben. Diese waren jeweils in ihrer Fragestellung offen, ließen eine Vielzahl von Vermutungen zu und es

konnten einfach Beispiele generiert werden. Im Verlauf der Studie kristallisierten sich die Methoden des Lauten Denkens (Verbalisieren von Gedanken beim Bearbeitungsprozess) und der Dyade (Bearbeiten einer Aufgabe in Zweiergruppen) als am ergiebigsten im Sinne der Projektziele heraus.

Die Auswertung der Daten orientierte sich forschungsmethodisch am Modell der Grounded Theory (STRAUSS 1991). Grundlage hierfür bildeten die transkribierten Videoaufnahmen und die bei der Aufgabenbearbeitung entstandenen Produkte der Teilnehmenden. Insgesamt wurden fünf verschiedene Aufgaben eingesetzt und jeweils verbale Impulse formuliert, die nach dem Prinzip der minimalen Hilfe verwendet wurden.

Ergebnisse

Anhand eines Transkriptausschnitts zu einer Videosequenz, stellen wir exemplarisch erste Ergebnisse vor. Bei den Probanden P1 und P2 handelt es sich um zwei Studierende, die gemeinsam die abgebildete Aufgabe bearbeiteten. Beobachtete Handlungen sind in Klammern angeführt.

P2: Also mir fällt zu hier... Also ich würde mich erst mal auf die Frage beziehen, von der Dame da. „Ich habe 8 Münzen, geht das auch bei mir?“ (P1 und P2 betrachten das Arbeitsblatt)

P1: Mhm.

P2: Ehrlich gesagt: (..) ja.

P1: Nö. (P1 nimmt sich acht Münzen)

P2: Komm, wir testen mal.

[...]

P2: Wie sollen wir es machen?

P1: Ja, leg mal.

P2: Ok, es geht halt nicht wirklich auf. Hier haben wir das Problem wieder. 1,2,3. (.) Mit acht geht es definitiv nicht –

wir können ja nicht auflegen, höchstens wir hätten dann wieder die Doppelstufe und das dürfen wir nicht. (Probanden verschieben Münzen. Legen das Beispiel 3-2-1)

P1: Ja, wenn du eine (.) nein quatsch, geht nicht. (P1 verschiebt eine Münze.)

Treppenzahlen / Reihenfolgezahlen

Die drei Zahlenforscher (Till, Ole und Maria) untersuchen Treppenzahlen.

Was kannst du alles über Treppenzahlen herausfinden?

In diesem vereinfachten Transkriptausschnitt zeigen sich einige für das mathematische Explorieren typische Vorgehensweisen, die sich folgendermaßen kategorisieren lassen. In derselben Weise wurde eine große Zahl weiterer typischer Vorgehensweisen beim experimentellen mathematischen Arbeiten kategorisiert.

Vorgehensweise	Beschreibung	Beispiel
intuitive Hypothese	Hypothese wird intuitiv formuliert und als Anker für weitere Überlegungen genutzt.	„Geht nur bei geraden Zahlen“ „spontan: 9“
explorieren	Unsystematische Erkundung (Ausprobieren) von Beispielen.	„Leg mal.“
Gegenbeispiel	Beispiel wird genutzt, um eine Vermutung zu verwerfen oder genauer zu spezifizieren.	„die 10 geht auch als Treppenzahl – also gehen auch gerade Zahlen als Treppenzahlen“
...

Interpretationsansatz „Drei-Räume-Modell“

Zur Strukturierung der von uns identifizierten Vorgehensweisen schlagen wir für das innermathematische Experimentieren folgendes theoretische Modell vor: Wir deuten das Untersuchen von Beispielen als Experiment im Prozess des mathematischen Erkenntnisgewinns und können daher in Anlehnung an das Modell des wissenschaftlichen Forschens als Suche in zwei Räumen (KLAHR/DUNBAR 1988) ebenfalls zwei Räume unterscheiden, den *Beispielraum* (der alle möglichen Beispiele eines Phänomenbereichs enthält) und den *Hypothesenraum* (vermutete Zusammenhänge).

Die Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren zeigen sich im Wechsel zwischen den beiden Räumen und drücken so spezifische Beziehungen aus. Diese Beziehungen bezeichnen wir als Strategien und verorten sie in einem dritten Raum, dem *Strategieraum*. Dieser Raum vermittelt zwischen den beiden anderen, in dem er die Intentionalität des Wechsels präzisiert. Zu den nächsten Projektzielen gehört die Entwicklung von Verfahren zu präziseren Identifikation solcher Strategien.

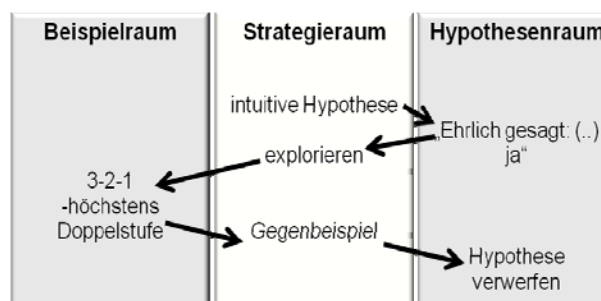


Abbildung 1: Drei-Räume-Modell - Einordnen von Beispielen, Hypothesen und Strategien anhand des Beispiels aus dem Transkript

Literatur

- HEINTZ, B. (2000): *Die Innenwelt der Mathematik. Zur Kultur und Praxis einer beweisenden Disziplin*. Springer-Verlag, Wien
- KLAHR, D./ DUNBAR, K. (1988): Dual Space Search During Scientific Reasoning. In: *Cognitive Science* 12, 1-48
- PEIRCE, C. S./ WALTHER, E. (Hrsg.) (1965): *Die Festigung der Überzeugung und andere Schriften*. Agis Verlag GmbH, Baden-Baden
- STRAUSS, A. L. (1991): *Grundlagen qualitativer Sozialforschung. Datenanalyse und Theoriebildung in der empirischen soziologischen Forschung*. Wilhelm Fink Verlag, München