

Franz PICHER, Klagenfurt

Beschreibung von Änderungen

Warum beschäftigt man sich mit Änderungen? Wieso soll gerade das interessant sein?

Ich biete eine Reflexion über die Beschreibung von Änderungen an, wobei ich zunächst die Beschreibung von Änderungen mithilfe der Alltagssprache und der Mathematik betrachte und dann auf mögliche Bedeutungen der angestellten Überlegungen für den Mathematikunterricht hinweise.

Beschreibung von Änderungen in der Alltagssprache

THESE 1: Unsere Beobachtungen in der Umwelt führen zur Beschreibung von Änderungen. Ein erster Schritt ist die alltagssprachliche Beschreibung von Änderungen, wobei die Richtung der Änderung beschrieben wird und Änderung zeitlich gemeint ist. Als einen zweiten Schritt ermöglicht die Alltagssprache die Beschreibung von Änderungen in Bezug auf andere Größen, beispielsweise den Ort. Die Alltagssprache bietet uns Begriffe zur Beschreibung der Änderung von Änderungen.

Änderung setzt die Möglichkeit verschiedener Zustände voraus, diese Zustände können gerade durch ihre Änderung für uns interessant werden. Die verschiedenen Zustände können zunächst rein qualitativ – unter Verwendung der Alltagssprache – verglichen werden. Wörter wie „wärmer-kälter“ und „steigen-fallen“ dienen dabei zur Beschreibung der Richtung der Änderung, wobei eine explizite Angabe eines Referenzwertes möglich aber nicht zwingend notwendig ist. Bezugsgröße für die Änderung ist zunächst das Fortschreiten der Zeit, andere Bezugsgrößen, wie z.B. der Ort, sind aber ebenso möglich. Wenn an die Stelle der Zeit beispielsweise der Ort tritt, muss zusätzlich die Richtung des örtlichen Fortschreitens angegeben werden, auf den sich die angegebene Änderung der betrachteten Größe bezieht. Im Vortrag wurden Beispiele wie die folgenden diskutiert:

- Heute ist es wärmer als gestern.
- Die Temperatur steigt.
- In Richtung Äquator wird es wärmer.

Änderungen als Objekte der Betrachtung

Die Einführung neuer Größen, die Änderungen zum Objekt machen, stellt einen wichtigen Denkschritt im Rahmen der Beschreibung von Änderungen dar. Ich glaube, dessen sollte man sich bewusst sein. Im Vortrag wur-

den diesbezüglich Beispiele wie: „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt.“ diskutiert.

Unter Verwendung von Begriffen wie „Neuverschuldung“ können Änderungen wie Zustandsgrößen gedacht werden, insbesondere können dieselben Wörter, die uns helfen, Änderungen von Zuständen zu beschreiben, verwendet werden, um Änderungen von Änderungen zu beschreiben; die „alten“ Begriffe werden dann auf das neue Objekt „Änderung“ angewandt. Wir können damit Begriffe wie „steigen-fallen“ und „zunehmen-abnehmen“ in gleicher Art und Weise benützen, wie zuvor in Zusammenhang mit Begriffen, die Information über einen Zustand geben. Dies kann einerseits die Beschreibung vereinfachen: Die Aussage „Die Neuverschuldung des Bundes sinkt.“ würde ohne Verwendung des Begriffs „Neuverschuldung“ zum Beispiel so umschrieben werden müssen: „Die Verschuldung des Bundes steigt immer weniger stark an.“, was die Beschreibung schwieriger macht; die Aussage wird länger und komplizierter. Andererseits kann man bei Verwendung des Begriffs „Neuverschuldung“ leicht übersehen, dass das Objekt der Betrachtung hier als Änderung eines Zustandes gedeutet werden kann. Steffen Hahn und Susanne Prediger (Hahn & Prediger 2008, S. 177) betonen diesbezüglich die Wichtigkeit der Unterscheidung zwischen Bestand und Änderung, um Ebenenverwechslungen zu vermeiden.

Beschreibung von Änderungen mithilfe der Mathematik

THESE 2: Der Wunsch nach Beurteilung, Vergleich und Normierung von Änderungen führt zur Quantifizierung von Änderungen mithilfe der Mathematik. Die Mathematik bietet uns zur Beschreibung von Änderungen neue Begriffe an, die durch Berechnungsvorschriften auf bereits bekannte Größen zurückgeführt werden. Die neuen Begriffe, die uns die Mathematik anbietet, können uns im Zusammenspiel mit der alltagssprachlichen Beschreibung von Änderungen dabei helfen, über unsere Beschreibung von Änderungen nachzudenken.

Gerade die Verwendung von Zahlen in der mathematischen Beschreibung von Zuständen weist auf die Möglichkeit anderer Zustände und damit auf die Möglichkeit der Änderung von Zuständen hin. Der Vergleich zu einem Referenzwert wird durch die Mathematik in Form der Angabe eines Zahlenwertes quantifiziert. Die Verwendung von Zahlen ermöglicht – wenn die Skala einmal festgelegt ist – den Verzicht auf die Angabe eines Referenzwertes, diesen kann sich jeder selber aussuchen.

Die Quantifizierung von Änderungen ermöglicht, zusätzlich zur Richtungsangabe der Änderung in der Alltagssprache, die intersubjektive Angabe der Größe einer Änderung.

Festlegung von Änderungsmaßen durch Berechnungsvorschriften

Die Mathematik bietet uns die Möglichkeit, aus mehreren gegebenen Größen eine neue Größe zu berechnen, was auch im Rahmen von Änderungen eine zentrale Rolle spielt. In Form der Ergebnisse dieser Berechnungen stellt uns die Mathematik – ebenso wie die Alltagssprache – neue Begriffe zur Beschreibung von Änderungen zur Verfügung, im Falle der Mathematik zeichnen sich die neuen Begriffe dadurch aus, dass sie aus mehreren Größen – dies können Zustände und Änderungen sein – hervorgehen.

Die folgende Übersicht zeigt Beispiele für berechnete Größen, die Beschreibungen von Änderungen mithilfe der Mathematik darstellen.

$f(t)$	Zustandsgröße
$f(t) - f(t_0)$	absolute Änderung
$\frac{f(t) - f(t_0)}{f(t_0)}$	relative Änderung (Änderung im Vergleich zu Zustand)
$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$	Änderungsrate (Änderung im Vergleich zu Änderung)
$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$	momentane/lokale Änderungsrate

Die Anzahl der Größen, aus denen sich die jeweils neue Größe berechnet, steigt dabei in obiger Übersicht an, wie die folgende Darstellung von „Stufen von Änderungsmaßen“ zeigt:

- 1. Stufe: Zustandsbeschreibung (1 Größe)
- 2. Stufe: absolute Änderung (2 Größen)
- 3. Stufe: relative Änderung (3 Größen bzw. 1 Änderung und 1 Zustand)
- 4. Stufe: (momentane) Änderungsrate (4 Größen bzw. 2 Änderungen)

Reflexion über die Beschreibung von Änderungen als Inhalt der Sekundarstufe II

Mein Vortrag soll auch als Vorschlag dafür gesehen werden, was in der Sekundarstufe II im Rahmen von Änderungen diskutiert werden könnte. Anstatt den neuen Aspekt „lokale Änderungsrate“ im Rahmen der Analysis sehr intensiv zu bearbeiten, schlage ich einen Rückblick auf bereits Gelern-

tes und eine Aufweitung des Blicks hinsichtlich der Beschreibung von Änderungen, also Reflexion über die Beschreibung von Änderungen vor.

Wichtig scheint mir, den Überblick über das Gebiet, in dem man sich gerade bewegt, zu vermitteln; wenn man sich auf eine Möglichkeit, Änderungen zu beschreiben, konzentriert, kann man leicht den Überblick verlieren – so bietet beispielsweise die Analysis eben lediglich eine Möglichkeit unter anderen dafür an, Änderungen zu beschreiben. Vielleicht verlieren die Lernenden das Bewusstsein für den inhaltlichen Aspekt ihres Tuns in der Differentialrechnung nicht nur wegen der rein technischen Orientierung dieses Tuns, sondern auch weil lediglich diese eine Möglichkeit zur Beschreibung von Änderungen betrachtet wird.

Zentral sollten ein Vertiefen bereits bekannter Inhalte und die Reflexion darüber sein, und nicht ein Erlernen möglichst vieler neuer Inhalte auf dann zwangsweise niedrigem Reflexionsniveau.

Die Sekundarstufe sollte ein Ort sein, an dem man sich nochmals auf die bereits gelernten Dinge konzentriert und diese in Zusammenhang setzt. Gerade Änderungen bieten sich dafür an, weil sie Inhalt des Mathematikunterrichts aller Schulstufen sind. Neu sollten in der Sekundarstufe II also nicht primär die Inhalte sein, sondern das Umgehen mit den Inhalten und das Stellen von Fragen wie:

- Wieso sind Änderungen für uns interessant?
- Wie beschreiben wir Änderungen in der Alltagssprache?
- Wie beschreiben wir Änderungen mithilfe der Mathematik?
- Welche Rolle spielen die verschiedenen Änderungsmaße im Rahmen der Beschreibung von Änderungen?

Reflexion über diese Fragen kann dann auch helfen, eine alte Forderung von Roland Fischer und Günther Malle umzusetzen: „Die Frage des Bildungssinns eines Gegenstandes muss selbst Gegenstand des Bildungsprozesses sein.“ (Fischer & Malle 2004, S. 26)

Literatur

- Fischer, R., & Malle, G. (2004). *Mensch und Mathematik* (2 ed. Vol. 5, 1 ed. 1985). München/Wien: Profil.
- Hahn, S., & Prediger, S. (2008). Bestand und Änderung - Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *Journal für Mathematik-Didaktik*, 29(3/4), 163-198.