Heinz SCHUMANN, Weingarten

Räumliches Analogisieren ebener Geometrie

Die Analogiebildung ist eine effektive und weitreichende Methode der Erkenntnisgewinnung. Neben anderen heuristischen Methoden für das Problemlösen wird deshalb ihre explizite Vermittlung im Mathematikunterricht immer wieder gefordert, obwohl sie in den so genannten Kompetenzkatalogen aktueller Bildungspläne nicht mehr Erwähnung findet. Die an Analogien reiche Elementargeometrie, insbesondere die zwischen der ebenen und räumlichen Geometrie, eignen sich besonders wegen ihrer Anschaulichkeit als Übungsfeld für das Analogisieren, das Anwenden ebener Geometrie und die Raumvorstellung in den Sekundarstufen. Die Analogisierung von ebener zu räumlicher Geometrie bietet einen organischen Weg der Verräumlichung ebener Geometrie und der Vernetzung ebener mit räumlicher Geometrie. Analogisierung im Verbund mit der induktiven Methode führt zur Bildung raumgeometrischer Begriffe, Aussagen und Verfahren. Mit den Konstruktions- und Visualisierungsmöglichkeiten, die interaktive dynamische Raumgeometrie-Systeme wie Cabri 3D bieten, kann man die räumliche Analogisierung ebener Geometrie konstruktiv praktizieren. Gegenstände des räumlichen Analogisierens ebener Geometrie sind Begriffe, Konstruktionen, Berechnungen, Sätze und Beweise. – Aus Platzgründen können wir hier nur einen Ausschnitt aus dem reichhaltigen Thema bieten und müssen auf die angegebene Literatur verweisen.

1. Direkt verräumlichendes Analogisieren mittels Konstruktion

Viele ebene Konfigurationen gestatten eine räumliche Analogisierung, die direkt auf ihnen aufsetzt. Dazu konstruiert man, wie von den dynamischen 2D-Geometriesystemen her gewohnt, in einer zur Bildschirmebene parallelen Ebene eine ebene Konfiguration (vgl. Abbildung 1 mit zwölf solchen Konfigurationsbeispielen), dreht die Ebene mit dieser Konfiguration in den (virtuellen) Raum hinein und konstruiert auf dieser mittels analoger räumlicher Konstruktionen eine räumlich analoge Konfiguration. Am Beispiel der ersten Konstruktion Euklids sei das verdeutlicht: Man dreht die ebene Konfiguration (Abb. 2a) in den Raum. Anstelle der Grundlinie fungiert jetzt als Grundfläche das gleichseitige Dreieck. Um die Eckpunkte dieses Dreiecks werden Kugeln mit den Radien der Dreiecksseiten konstruiert, die einander in Kreisen schneiden (Abb. 2b), – analog dem Kreisschnittpunkt in der Ebene. Der Schnittpunkt der drei Schnittkreise bildet mit dem Basisdreieck ein Tetraeder (Abb. 2c), dessen Gleichkantigkeit analog der Gleichseitigkeit des Dreiecks in der Ebene per Konstruktion nachgewiesen ist.

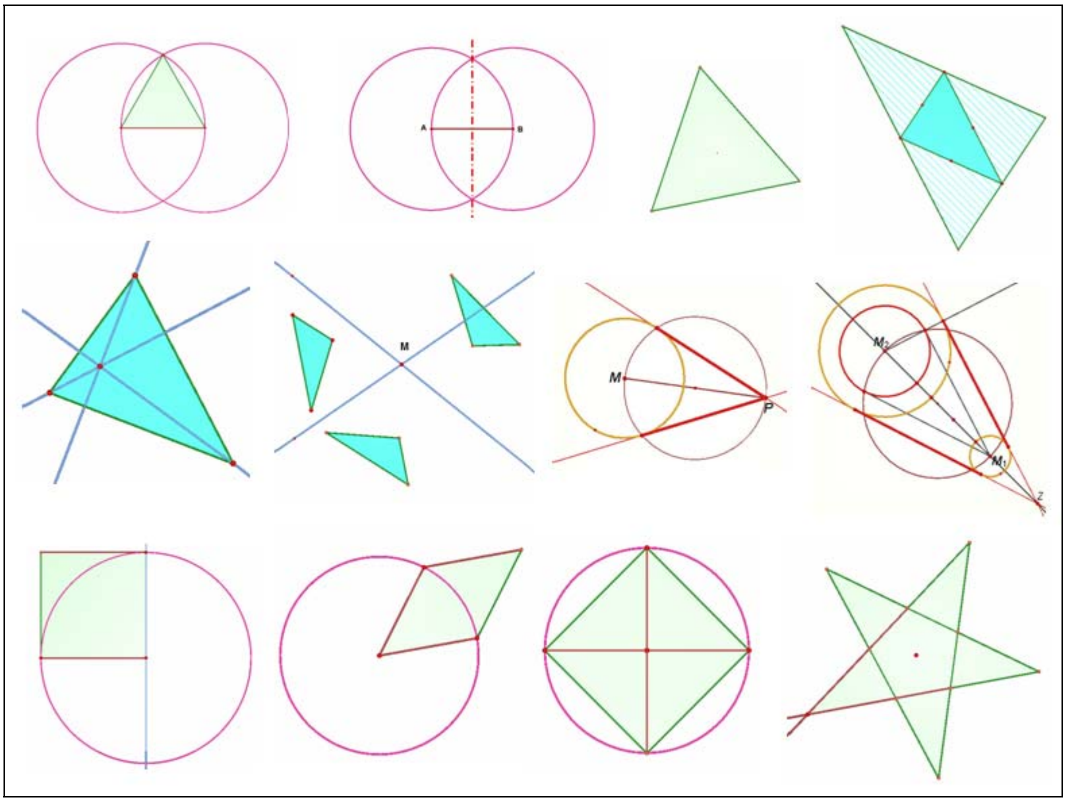


Abbildung 1

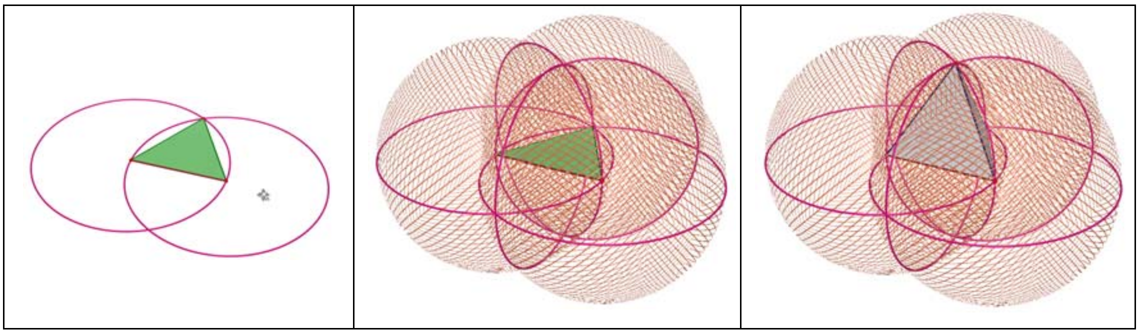


Abbildung 2a-c

2. Satz- und Beweisanalogisierung

Folgende Methode zur Satz- und Beweisanalogisierung empfiehlt sich:
Satzfindung mittels Analogiebildung: Konstruiere eine zur ebenen Konfiguration, die den betreffenden ebenen Satz konkretisiert, eine räumlich analoge. Beachte dabei, dass es mehrere Möglichkeiten der Analogisierung geben kann. Überprüfe die raumgeometrische Aussage gegebenenfalls anhand einer interaktiven Messung/Berechnung.
Beweisfindung mittels Analogiebildung: Versuche einen Beweis des entsprechenden Satzes der ebenen Geometrie räumlich zu analogisieren (verwende dabei die bei der Satzfindung erstellte Konstruktion als Beweisfigur, die von allen Seiten betrachtet werden kann). Und/oder verwende den ana-

logen Satz der ebenen Geometrie als Beweismittel, um einen Beweis für die räumliche Aussage zu finden. – Die Methode sei an folgendem Satz mit Beweis realisiert: Die Winkelhalbierende eines Dreiecks schneidet die Gegenseite im Verhältnis der den Winkel bildenden Dreiecksseiten (Abb. 3).

Behauptung: Die Winkelhalbierende eines Innenwinkels teilt die Gegenseite im Verhältnis der Seiten, die Schenkel des Innenwinkels sind: |TA|/|TB| = |AC|/|BC| für die Halbierende w des Winkels mit dem Scheitel C.

Beweis: Da T nach Voraussetzung abstandsgleich zu den Winkelschenkeln AC, BC, gilt für die Flächeninhalte der Dreiecke BCT und ACT:
|ACT|=|AC|*h'/2=|TA|*h/2,
|BCT|=|BC|*h'/2=|TB|*h/2.
Division liefert: |TA|/|TB| = |AC|/|BC|.

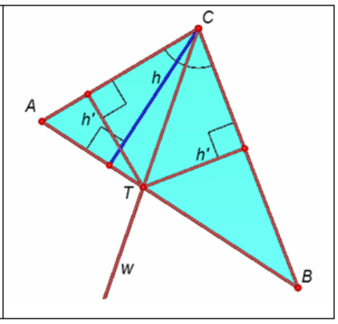
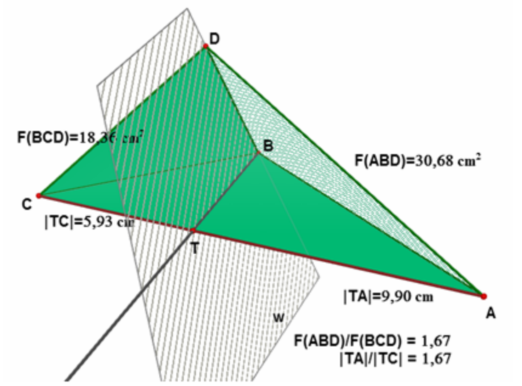
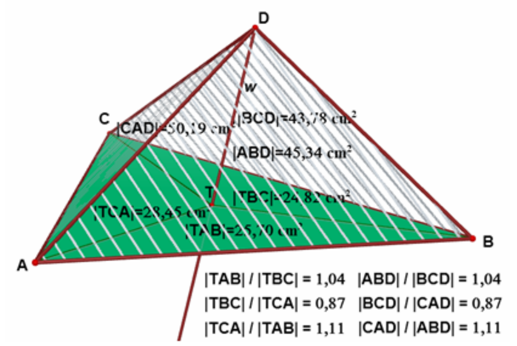


Abbildung 3



Behauptung: Die Halbierende des Winkels zwischen zwei Seitenflächen eines Tetraeders ABCD teilt die Gegenkante im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die Seitenflächen ABD, BCD ist also |TA|/|TC| = F(ABD)/F(BCD), wobei T Schnittpunkt der Winkelhalbierende zwischen Dreieck ABD und Dreieck BCD mit der Gegenkante AC zur Kante BD.

Abbildung 4a (1. Analogisierung: Satz)



Behauptung: Die zu den Seitenflächen eines Tetraeders abstandsgleiche Gerade teilt die Gegenseitenfläche im Verhältnis dieser Seitenflächen. Für die abstandsgleiche Gerade w durch die Ecke D also: |TAB|/|TBC|/|TCA|=|ABD|/|BCD|/|CAD|.

Abbildung 4b (2. Analogisierung: Satz)

Beweis: Da T nach Voraussetzung abstandsgleich zu den Schenkelflächen ABD und CBD, gilt für die Rauminhalte der Tetraeder ABDT und CBDT: V(ABDT)=F(ABD|)·h'/3, V(CBDT)=F(CBD)·h'/3. Andererseits gilt für die Volumina der Tetraeder ABDT und CBDT auch: V(ABDT)=F(TAD)·h/3, V(CBDT)=F(TCD)·h/3. Für die Flächeninhalte der höhengleichen Dreiecke TAD und TCD gilt: F(TAD)=|TA|·h''/2 und F(TCD)=|TC|·h''/2. Entsprechendes Gleichsetzen und Dividieren liefert: F(ABD)/F(CBD)= |TA|/|TC|.

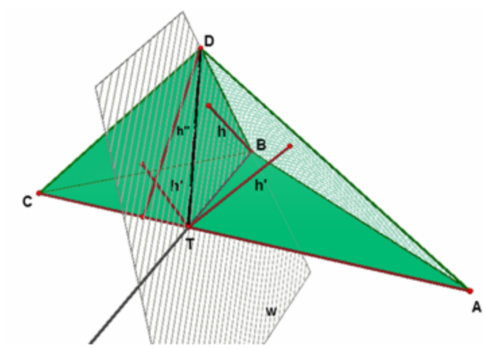


Abbildung 5a (1. Analogisierung: Beweis)

Beweis: Da T nach Voraussetzung gleichen Abstand zu den Seitenflächen ABD, BCD, CAD hat, gilt für die Rauminhalte der Teiltetraeder ABDT, BCDT, CADT:
|ABDT|=|ABD|*h'/3=|TAB|*h/3, |BCDT|=|BCD|*h'/3=|TBC|*h/3, |CADT|=|CAD|*h'/3=|TCA|*h/3.
Mittels Division folgt daraus |TAB|/|TBC|=|ABD|/|BCD|, |TBC|/|TCA|=|BCD|/|CAD|, |TCA|/|TAB|=|CAD|/|ABD|. Kurz: |TAB|/|TBC|/|TCA|=|ABD|/|BCD|/|CAD|.

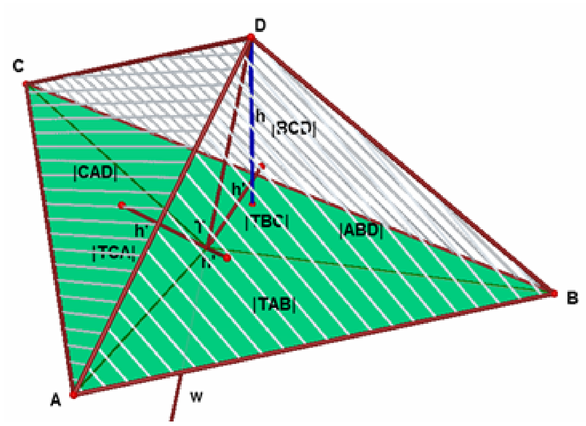


Abbildung 5b (2. Analogisierung: Beweis)

Die Abbildungen 4a/4b zeigen die zwei analogen räumlichen Konfigurationen mit Mess- und Berechnungsergebnissen, die zur Formulierung der analogen räumlichen Aussagen führen bzw. diese experimentell bestätigen. Die Analogisierungen des geeigneten Beweises für den ebenen Satz liefern die Begründungen für die räumlichen Aussagen (Abb. 5a/4b), die nicht nur die gefundene Erkenntnis sichert, sondern uns vor allem Einsicht in den geometrischen Sachverhalt vermittelt.

3. Schlussbemerkungen

Das räumliche Analogisieren ebener Geometrie mit interaktiver Computerunterstützung ist ein eindrucksvolles Beispiel für den *„didaktischen Mehrwert“* der Computernutzung im Geometrie-Unterricht. Diese Art des Analogisierens eröffnet für Schüler/-innen, Studenten/-innen und Lehrer/-innen ein weites Feld raumgeometrischen Arbeitens.
Das Raumgeometrie-Curriculum für Allgemeinbildende Schulen ist unter dem Eindruck interaktiver und intuitiver Raumgeometrie-Werkzeuge, die den Zugang zum Reichtum an raumgeometrischem Wissen konstruierend öffnen, zu reformieren.

Literatur

Bainville, E., Laborde, J.-M. (2004-2007): Cabri 3D 2.1 (Software). Grenoble: Cabrilog. Deutsche Version (Bearbeitung von H. Schumann) zu beziehen z. B. von www.cotec.de

Schumann, H.: „Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum“, Hildesheim und Berlin: Franzbecker, 2007 – und die dort zum Thema angegebene Literatur.