Fritz SCHWEIGER, Salzburg

Ordnen – eine fundamentale Idee

Ordnung herstellen, den Überblick behalten. Dies ist eine im Alltag tief verankerte Tätigkeit. In der Geschichte der Mathematik lässt sich zeigen, dass schon sehr früh versucht wurde, eine Klassifikation des Materials anzustreben. Weiters ist Ordnen in allen Teilgebieten der Mathematik und auf verschiedenen Niveaus aufzufinden. Somit erfüllt Ordnen die Kriterien für eine fundamentale Idee (Schweiger 2006).

Ordnen ist verbunden mit benachbarten Ideen: Finden und Entdecken von Prototypen, Bereitstellen von guten Beispielen und markanten Gegenbeispielen, Klassifikationen (nach Merkmalen) und Aufstellen von Normalformen.

Der Begriff Prototyp meint zunächst eine Kategorie, die entwicklungspsychologisch und sprachlich verankert ist. Prototypen sind relevant für die Begriffsbildung als markante Muster. Die Bereitstellung interessanter und auf das zentrale Eigenschaften der Begriffe weisender Prototypen ist eine didaktische Aufgabe. Prototypen sind auch sprachlich bedeutsam (von Sprache zu Sprache verschieden: "Maus" und "Fledermaus", aber "mouse" und "bat" versus "Fisch" und "Qualle", aber "fish" und "jelly fish").

Das Kind erfährt Prototypen aus Begegnungen, ohne dass eine (bewusste) Selektion distinktiver oder kontrastierender Merkmale auftritt. Hier bietet die Umwelt reichliches Material. Es gibt Beispiele, wo der Prototyp zugleich das einzige Exemplar ist: die Sonne, der Mond, die Erde. Bemerkenswert ist, dass Strukturen, die kategorischen Axiomensystemen entsprechen, genetisch früh sind: die Zahlbereiche sind älter als Gruppen oder Ringe! Für den Einstieg in die Mathematik bieten sich Zahlen und Formen an. Das Zählen birgt schon den Ordnungsaspekt in sich, denn die Zahlen werden (schon beim Spracherwerb) als Reihe geordnet.

Geometrische Formen sind eher diffus. Hier bietet sich der Umgang mit geeigneten Spielen an, wobei auch die Farbe oder Größe als sekundärer Ordnungsfaktor verwendet werden kann (z. B. Ordnen von roten Kreisen und blauen Quadraten).

Die Bereitstellung der Prototypen ist eng verbunden mit der Auswahl von Abbildungen und Beispielen. Erst auf der Stufe erfasster Ordnungsprinzipien ist die Bereitstellung von Gegenbeispielen sinnvoll.

Beruht die Erfassung von Prototypen eher auf intuitivem Wahrnehmen ("Dies ist ein Hund. Dies ist eine Katze"), ist das Klassifizieren mit der Angabe von Kriterien verbunden. Dies führt gelegentlich zu Paradoxien. Quadrat und Rechteck werden als verschiedene Prototypen empfunden (wie auch Kreis und Ellipse), aber nach den Merkmalen *Viereck mit vier rechten Winkeln* ist ein Quadrat ein spezielles Rechteck. Im Alltag wird die Verschiedenheit der Seitenlänge als prototypisch für das Rechteck empfunden.

Die intuitive Mitnahme von Merkmalen erschwert besonders die Begriffsbildung in der Analysis. Eine *stetige* Kurve sollte in jedem Punkt eine Tangente besitzen (also *differenzierbar* sein). Selbstverständlich bietet sich die Funktion $f(x) = |x|$ als Gegenbeispiel an, aber den Knick zu zeichnen, erfordert eine jähe Richtungsänderung oder eine Unterbrechung, die der Intuition von Stetigkeit widerspricht. Der Unterschied der Funktionen

$$f(x) = 0, x \leq 0,\ f(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}, x \geq 0$$

und

$$g(x) = 0, g(x) = x^3,\ x \geq 0$$

ist bei einer Spielzeugeisenbahn bei genauem Hinsehen (wenn ein Zug fährt) zu sehen, aber erst durch den Einfluss der *Krümmung* auf das dynamische Verhalten erklärbar.

Es erfordert ebenso eine didaktische Sorgfalt um die Begriffe *Stetigkeit* und *Stabilität* zu trennen: Die Eingangsvariablen müssen geeignet kontrolliert werden, um das Ziel nicht zu verlieren bzw. die Eingangsvariablen sind qualitativ eher unerheblich (Beispiel aus der Hochschuldidaktik: Die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + ay' + by = 0$ sind in Abhängigkeit von $y(0)$ und $y'(0)$ und der Lage der Eigenwerte zu untersuchen).

Normalformen sind als standardisierte Prototypen anzusehen. Exponentialfunktionen besitzen zwei prototypische Formen: $y = e^x$ (exponentielles Wachstum) und $y = e^{-x}$ (exponentielle Abnahme). Dazu gehören Merkmale, die eine übersichtliche Klassifikation gestatten und (im Hintergrund) ein Repertoire von geeigneten Abbildungen. So ist die Koordinatentransformation

$$\bar{x} = \alpha x, \alpha > 0$$
$$\bar{y} = \beta y, \beta > 0$$

Die Abbildung, welche die allgemeine Form $y = y_0 e^{\lambda x}, y_0 > 0$, mittels $\alpha = |\lambda|$ und $\beta = \frac{1}{y_0}$ in die beiden oben genannten Formen überführt.

In vielen Fällen wird auf die Bereitstellung der passenden Abbildungen verzichtet! Zum Standardprogramm jeder linearen Algebra gehört allerdings der Hinweis, dass Vektorräume mit gleichem Grundkörper und gleichmächtiger Basis isomorph sind.

So gesehen ist der R^d nicht nur der Prototyp, sondern auch die Normalform eines *d*-dimensionalen Vektorraums. In vielen Fällen ist die Isomorphie nicht schwer zu erkennen, aber die Prototypen schauen sich auf den ersten Blick nicht ähnlich. Die additive Restklassengruppe modulo *m* ist zur Gruppe der *m*-ten Einheitswurzeln (der Lösungen von $z^m = 1$ im Körper der komplexen Zahlen) isomorph.

Man kann auch vertraute Fragestellungen durch Hinweis auf andere Merkmale variieren. Als Normalformen der Kegelschnitte sind etwa die drei Gleichungen

$$x^2 + y^2 = 1, x^2 - y^2 = 1, x^2 = y$$

brauchbar. Die Ellipse ist einteilig und beschränkt, die Hyperbel ist zweiteilig und unbeschränkt, die Parabel ist einteilig und unbeschränkt. Es fehlt ein Kegelschnitt, der zweiteilig und beschränkt ist!

Einige Bemerkungen zur Arbeit von Tsamir et al. 2008 seien zum Abschluss angefügt. Es geht um den Begriff des Dreiecks, wobei (unausgesprochen) der Begriff des Dreiecks der euklidischen Geometrie zu Grunde gelegt wird. Damit werden Dreiecke mit leicht gezackten Rändern oder abgerundeten "Ecken" als Nichtbeispiele ("non-intuitive non-examples") angesehen. Es stellt sich die Frage, ob der euklidische Begriff mit Erfahrungen und Sprache des Alltags korrespondiert. Der Begriff des Dreiecks, wie er in der algebraischen Topologie formuliert wird, erscheint oft näher zu liegen. Ein Dreieck ist ein simplizialer Komplex, der durch seine "Skelette" (vereinfacht: drei Ecken, drei Seiten, eine Fläche) festgelegt wird. Man wird ein wenig an Inhelder erinnert, die in Woods Hole erklärt hat: "Die psychologische Entwicklung entspricht in ihrer Abfolge oft dem axiomatischen Aufbau eines Lehrgegenstandes genauer als der historischen Linie der Begriffsentwicklung innerhalb des Fachs. Zum Beispiel bemerkt man, dass bestimmte topologische Begriffe wie Verbindung, Trennung, Enthaltensein usw., der Ausbildung von Begriffen aus der euklidischen und darstellenden Geometrie vorausgehen, obgleich die topologischen Begriffe in ihrer formalen Gestalt in der Geschichte der Mathematik neueren Datums sind als die letztgenannten." (Bruner 1970: 53/54). Allerdings darf daraus nicht der Fehlschluss gezogen werden, dass man Topologie vor Geometrie unterrichten sollte. Ein auch an der historischen Entwicklung orientierter Unterricht wird zu Recht elementare euklidische Geometrie an den Anfang setzen. Meine Bemerkungen zielen auf das Hintergrundwissen der Lehrerin oder des Lehrers.

So bilden drei Punkte ein Dreieck. Die verbindenden Seiten müssen gar nicht vorhanden sein! Wie groß ist die Fläche eines Warndreiecks? Wenn man es mit Leuchtfarbe beschichten will, wird man nur an den Rahmen denken. Wie schwer ist ein Triangel? Dazu muss man die Dicke und Dichte der verwendeten (gebogenen!) Metallstange kennen. Die metaphorische Verwendung von Dreieck im Alltag ("Dreiecksverhältnis") oder in der Wissenschaft ("Semiotisches Dreieck") sei nur erwähnt.

Literatur

Bruner, J. S. (1976). *Der Prozess der Erziehung.* Düsseldorf und Berlin 4. Aufl.: Schwann

Schweiger, F. (2006) Fundamental Ideas: A Bridge between Mathematics and Mathematical Education. In J. Maasz & W. Schlöglmann (eds): *New Mathematics Education Research and Practice* (S. 63-73). Rotterdam/Taipei: Sense Publishers

Tsamir, P., Tirosh, D. & Levinson, E. (2008) Intuitive nonexamples: the case of triangles. *Educ. Stud. Math*. 69, 81-95