Stefan UFER, Elisabeth LORENZ, München

Wahr oder falsch? Der Umgang mit Vermutungen als mathematische Kompetenz

1. Warum gerade Vermutungen?

Eine mathematische Vermutung ist zunächst eine Aussage, deren Wahrheit innerhalb der mathematischen Community nicht letztgültig durch einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel geklärt ist. Der Umgang mit solchen Vermutungen, beziehungsweise allgemeiner mit mathematischen Aussagen, deren Wahrheitsgehalt subjektiv noch nicht geklärt ist (obwohl u.U. doch irgendwo ein Beweis bzw. ein Gegenbeispiel existiert), ist zunächst für Mathematiker im Bereich der Forschung alltäglich. Insofern wird im Folgenden unter einer Vermutung eine mathematische Aussage verstanden, deren Wahrheit (subjektiv) nicht abschließend gesichert ist. Eine Vermutung kann dabei einerseits mit einer Einschätzung ihrer Plausibilität verbunden sein, andererseits mit dem Wissen über einschränkende Bedingungen ihrer Gültigkeit.

Der Umgang mit Vermutungen ist nicht nur Teil der professionellen Tätigkeit von Mathematikern, sondern wird im Bereich des Argumentierens als ein Ziel von Mathematikunterricht formuliert (KMK, 2003; KMK, 2004). Die Fähigkeit zum Umgang mit unsicheren Informationen ist darüber hinaus für Schülerinnen und Schüler von Bedeutung, weil mathematisches Wissen in der Regel nicht immer korrekt und genau erinnert wird. Die Rekonstruktion unvollständig oder ungenau erinnerter Zusammenhänge ist eine Anforderung, der sich Lernende wiederholt gegenüber gestellt sehen.

Letztlich ist der Umgang mit Vermutungen eine Komponente bei der Planung von Problemlöseprozessen. Für das mathematische Beweisen wird bereits von Koedinger und Anderson (1990) eine solche Planungsphase postuliert. Dass hier der Identifikation potentiell hilfreicher Zwischenbehauptungen, die in obigem Sinne auch Vermutungen sind, eine zentrale Rolle zukommt, zeigt die Analyse von Heinze et al. (2008). Auch in mathematischen Problemlöseprozessen im allgemeineren Sinn ist die Untersuchung von potentiellen Zusammenhängen zwischen relevanten Elementen der Problemsituation ein grundlegender Teil der Lösungsplanung.

2. Prozessmodelle und empirische Befunde

Ganz allgemein wird die Fähigkeit zum Umgang mit Vermutungen als „Conjecturing“ bezeichnet. Koedinger (1998) schlägt dafür ein Prozessmodell vor, das zwei Zielbereiche sowie mögliche Strategien (sub-goals) beschreibt, die zum Erreichen der Ziele eingesetzt werden können. Zu den

Zielbereichen zählt Koedinger das *Aufstellen von Vermutungen* sowie das *Argumentieren*. Strategien sind unter anderem das *Untersuchen von Vermutungen*, wie z.B. durch Umformulierung, Betrachtung von Einzelbeispielen, die *Deduktion*, im Sinne des Abwägens notwendiger und hinreichender Bedingungen für eine Behauptung sowie die *Konstruktion von Beweisen*, auch für Teile der Vermutung.

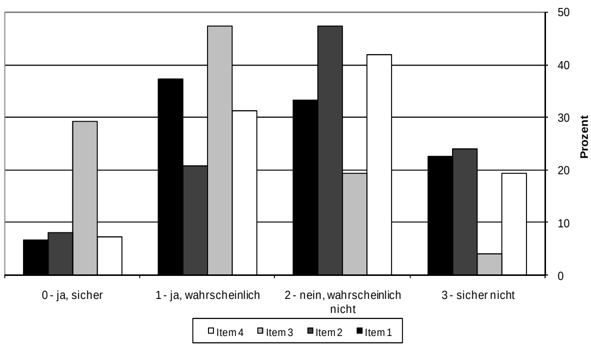
Im Folgenden wird in diesem Beitrag die Evaluation von Vermutungen durch induktive Arbeitsweisen im Mittelpunkt stehen, also inwiefern Vorwissen und Informationen aus stützenden bzw. widerlegenden Einzelbeispielen die Evaluation einer Hypothese beeinflussen. Für die Untersuchung von Beispielen fanden Barkai, Tsamir, Tirosh und Dreyfus (2003) bei einer Untersuchung an 27 Grundschullehrkräften heraus, dass etwa die Hälfte der Probanden stützende Beispiele für die Begründung von Allaussagen heranzog, ein Fünftel wertete Gegenbeispiele als ausreichend zur Ablehnung von Existenzaussagen. Ein differenziertes Bild zeigt sich in den Untersuchungen von Lin und Wu Yu (2005, Sekundarstufe I, jeweils über 1000 SchülerInnen): 10-20% der Probanden lehnen eine Aussage nicht vollständig ab und schränken ihre Gültigkeit nur ein, obwohl sie explizite Gegenbeispiele angegeben haben.

Eine Erklärung für diese unvollständige Interpretation von Informationen aus Gegenbeispielen können Theorien über den Umgang mit deduktiven Schlüssen im Alltag bieten. Basierend auf empirischen Ergebnissen eigener und fremder Untersuchungen schlagen Verschueren, Schaeken und d'Ydewalle (2005) ein Zwei-Prozess-Modell zur Evaluation deduktiver Aussagen vor. Ein schneller, heuristischer Prozess nutzt dabei probabilistisches Erfahrungswissen über die Häufigkeit des gemeinsamen Auftretens von Voraussetzung und Behauptung. Ein zweiter, langsamerer aber in vielen Fällen exakterer Prozess integriert Informationen über mögliche Ausschlussgründe der Behauptung und Gegenbeispiele. Eine offene Frage ist, ob sich Einflüsse des ersten Prozesses auch auf die Evaluation von mathematischen Aussagen zeigen und ob sich dadurch fehlerhafte Evaluationen von Vermutungen zumindest teilweise erklären lassen.

3. Spontane Einschätzung und gezielte Untersuchung von Vermutungen

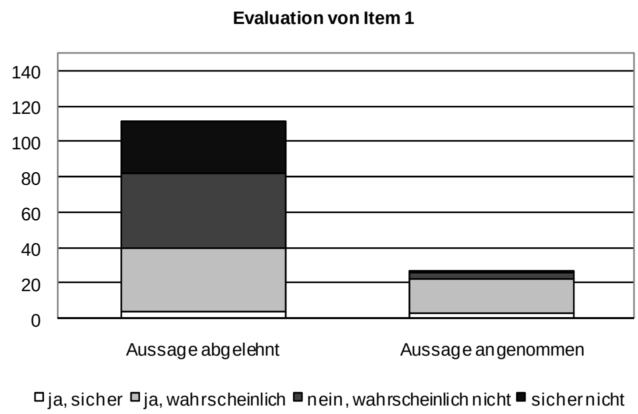
Zur Untersuchung dieser Frage wurde eine erste empirische Untersuchung mit 150 Zehntklässlern zweier bayerischer Gymnasien durchgeführt. Unter anderem wurden den Teilnehmern nacheinander vier mathematische „Vermutungen" aus dem Bereich der elementaren Zahlentheorie vorgelegt, beispielsweise: „*Wenn ich zu einer ganzen Zahl ihr Quadrat und eins addiere,* *dann bekomme ich immer eine Primzahl als Ergebnis*“ (Item 1). Für jede Vermutung sollte zunächst eine spontane Einschätzung ihrer Plausibilität auf einer vierstufigen Skala abgegeben werden. Anschließend waren die Vermutungen weiter zu untersuchen, eine neue, u.U. angepasste Formulierung der Vermutung anzugeben und ggf. ein Beweis dieser neuen Vermutung zu formulieren. Eine der vier vorgelegten Vermutungen (Item 3) war korrekt, ansonsten waren im Zahlbereich bis 20 Gegenbeispiele zu finden.

Wie die Ergebnisse von Johnson-Laird und Hasson (2003) für Alltagsargumentationen erwarten ließen, nutzten die Probanden zur Untersuchung der Vermutungen vorwiegend spezifische Beispiele, lediglich in zwei Fällen fand sich ein Ansatz zu Formalisierung und Deduktion. Zur Auswertung werden hier nur die spontanen Anfangseinschätzungen, die Anzahlen der in der Bearbeitung der SchülerInnen angegebenen Beispiele und Gegenbeispiele herangezogen sowie die letztendliche Evaluation der Aussagen.



Zunächst zeigte sich, dass die spontanen Einschätzungen der SchülerInnen relativ treffsicher waren. So wurde die korrekte Aussage signifikant häufiger positiv bewertet als negativ, bei den anderen drei Vermutungen zeigte sich der umgekehrte Effekt.

Der Zusammenhang zwischen den spontanen Einschätzungen und der Angabe eines Beispiels bzw. Gegenbeispiels wurde mittels Rangkorrelationen untersucht. Bei zwei Items ergaben sich mäßige, aber signifikante Korrelationenzwischen der anfänglichen Einschätzung der Aussage und der Anzahl stützender Beispiele. Bei allen drei Items war eine positive Anfangseinschätzung negativ mit der Angabe von Gegenbeispielen korreliert. Beispiele, die weder als Beispiele noch als Gegenbeispiele einzuordnen waren wurden kaum angegeben.



Letztendlich wurde die korrekte Aussage von 8% der SchülerInnen abgelehnt, die falschen Vermutungen wurden von 20%, 13% bzw. 20% angenommen. Dabei zeigte sich, dass die inkorrekten Evaluationen vornehmlich von Schülerinnen und Schülern stammten, die bereits eine inkorrekte Anfangseinschätzung der Aussagen angegeben hatten (Siehe z.B. Diagramm für Item 1). Auch für die einzelnen Items durchgeführte logistische Regressionsanalysen ergaben, dass neben der Anzahl der angegebenen Gegenbeispiele auch die anfängliche Einschätzung der Vermutungen einen signifikanten Zusammenhang mit der letztendlichen Entscheidung zur Annahme oder Ablehnung der Vermutung zeigt.

4. Diskussion

Auch wenn sich auf methodischer Seite noch einige Möglichkeiten zur Verbesserung des Studiendesigns aufgetan haben, deuten die Ergebnisse der Untersuchung darauf hin, dass neben den betrachteten Einzelbeispielen in der Tat auch die anfängliche, spontane Einschätzung der Vermutung einen Einfluss auf die letztendliche Entscheidung über Annahme oder Ablehnung der Vermutung hat. Dies ist mit entsprechenden Ergebnisse aus der Psychologie zum Umgang mit deduktiven Schlüssen im Alltag konsistent (Verschueren et al., 2005). Um einen genaueren Eindruck von den dieser Beobachtung zugrunde liegenden individuellen Prozessen zu bekommen ist eine Interviewstudie in Planung.

Literatur

Barkai, R., Tsamir, P., Tirosh, D. & Dreyfus, T. (2003). Proving or refuting arithmetic claims: The case of elementary school teachers. In: A.D. Cockburn, E. Nardi (Hrsg.), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 57-64. Norwich: PME.

Heinze, A., Ufer, S., Cheng, Y.-H., Lin, F.-L. & Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: teaching experiments in Taiwan and Germany. In: *ZDM - International Journal on Mathematics Education 40*(3), 443-453.

Johnson-Laird, P.N. & Hasson, U. (2003). Counterexamples in sentential reasoning. In: *Memory & Cognition 31*(7), 1105-1113.

Koedinger, K.R. & Anderson, J.R. (1990). Abstract planning and perceptual chunks: Elements of Expertise in Geometry. In: *Cognitive Science 14*, 551-550.

Koedinger, K.R. (1998). Conjecturing and argumentation in high-school geometry students. In: D. Lehrer & D. Chazan, *Designing learning environements for developing understanding of geometry and space*, 319-347.

KMK (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Schulabschluss.

KMK (2004). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich.

Lin, F.-L. & Wu Yu, J.-Y. (2005). False Proposition - As a means for making conjectures in mathematics classrooms. Vortrag auf der *Asian Mathematical Conference (AMC)*. http://ww1.math.nus.edu.sg/AMC/papers/Lin-Fou-Lai.pdf, (24.3.2009).

Verschueren, N., Schaeken & W., d'Ydewalle, G. (2005). A dual-process specification of causal conditional reasoning. In: *Thinking & Reasoning 11*(3), 239-278.