IngridaVEILANDE, Seefahrt Akademie Lettlands

Das Schubfachprinzip bei den Lösungen der kombinatorischen Aufgaben in den Mathematikolympiaden

Einführung

Die Gesamtheit der mathematischen Wettbewerbsaufgaben enthält einen bedeutenden Teil tematisch - vielfältiger kombinatorischen Aufgaben. Diese Probleme untersuchen die endlichen Mengen, die Sortierung oder die Alghoritmen der Suche, die Ausarbeitung und die Analyse der Alghoritmen. Bei den Lösungen dieser Probleme kann man verschiedene kombinatorische Methoden anwenden, um z.B. die Elemente in der Äquivalenzklassen einzuteilen, um die gemeinsamen Repräsentanten zu bestimmen, um die gegenseitige Entsprechung der Elementen zu feststellen. Oft ist es zweckmäßig die Ergebnisse der Geometrie, der Zahlentheorie, der Graphentheorie mit solchen allgemeinen Urteilsmethoden wie die mathematische Induktion, die Methode der Interpretationen, die Methode des Mittelwertes vereinigen.

Vielfältigkeit kombinatorischer Aufgaben

Die Aufgaben, bei welchen die kombinatorischen Berechnungen nötig sind, kann man nach den behandelten Themen (z.B.Verkehr, Anordnung, Freundschaft u.a.), oder nach dem Bereich der Mathematik (Kombinatorik, Graphentheorie u.a.), oder nach der Lösungsverfahren klassifizieren. Die allgemeinen Urteilsmethoden werden bei der Berechnungen gemeinsam mit der Gruppierung und Bewertung von Objekten benutzt. Eine von diesen Methoden ist das bekannte **Schubfachprinzip** (Lovasz, Pelikan, & Vesztergombi, 2005):

Haben wir n Kästen und geben mehr als n Objekte in diese hinein, dann gibt es mindestens einen Kasten, der mehr als ein Objekt enthält.

In den Computerwissenschaften, Graphen- und Zahlentheorien werden verschiedene kombinatorische Tatsachen bewertet und begründet. Das Schubfachprinzip wird dabei oft benutzt. Bei der Lösung von Wettbewerbsaufgaben kann man mit Hilfe von Schubfachprinzip die Menge der Elementenauslese verringern. Man kann auch den Ausmass der Auslese bewerten, auch die gemeinsame Elementenexsistenz begründen. Mann kann auch das gegenseitige Nichtübereinstimmen gegebener Äquivalenzklassen zeigen.

Beispiele kombinatorischer Aufgaben

Weiter werden kombinatorische Aufgaben verschiedener Art betrachtet (Васильев, Егоров, 1988; Sammlung der Aufgaben), wo man bei stufenweiser Lösung das Schubfachprinzip gebrauchen kann. Manchmal werden die Bedingungen der Aufgabe begreiflicher, wenn man sie mit Hilfe passender verständlicher Interpretation veranschaulicht.

Wiegen: Das Hauptziel bei den Aufgaben mit dem Wiegen ist die bestmögliche Strategie zu finden, mit deren Hilfe in einem bestimmten Mass gleichwertiger Objektenmenge den Aufgabenbedingungen entsprechende Objekte aussondern kann. Das Schubfachprinzip wird meistens gebraucht, um in der Teilmenge die Anzahl der gesuchten Elemente zu bewerten, oder, um die minimale Anzahl der Schritte beim Prüfungsprozess auszuwerten.

1. Aufgabe. Unter 12 gleichen Münzen 2 sind falsch. Das Gewicht der falschen Münzen Unterscheidet sich vom Gewicht der echten Münzen. Alle echten Münzen haben das gleiche Gewicht, auch die falschen Münzen haben das gleiche Gewicht. Wie kann man die Münzen in zwei Häufchen gleichen Gewichts einteilen, wenn man die Hebelwaage ohne Gewichte benutzt, und die Münzen werden nicht mehr als dreimal gewogen?

2. Aufgabe. Karl hat auf jedem Feldchen des Schachbrettes eine von natürlichen Zahlen (von 1 bis 64) geschrieben. Auf jedem Feldchen gibt es eine natürliche Zahl. Hanna kann die bestimmte Zahlenmenge erfahren, die auf diese Feldchen geschrieben sind, wenn sie eine Frage über eine x-beliebige Feldermenge stellt. Karl offenbart nicht, auf welchen Feldchen sich die Zahlen befinden.Welche ist die geringste Anzahl der Fragen, die Hanna stellen muss, damit sie die Zahlenaufstellung auf den Feldchen erfahren könnte?

Färbung: In diesem Aufgabenbereich könnte man zwei grundunterschiedliche Teilmengen von Aufgaben betrachten. In einer von diesen Mengen könnte man bedingt die Aufgaben einteilen, deren „Färbung" oder die Artenanzahl der gegebenen Elementenäquivalenz bei den Bedingungen der Aufgabe gegeben ist. Hier könnte man auch die bekannten Aufgaben vom Typ Ramsey (Ferneyhough, Haas, Hanson & MacGillivray, 2002) erwähnen, bei welchen die Existenz einer speziellen Art von der Elementenstruktur beweisen kann. Im zweiten Teil könnte man die Aufgaben einordnen, wo die „Färbung" während der Lösung der Aufgabe gestalten kann, um die gegebene Elementeneinteilung nach gemeinsamen Merkmalen zu veranschaulichen. Bei den Aufgaben, wo die „Färbung" als ein Zusatzargument eingeführt wird, ziemlich oft wird das Schubfachprinzip gebraucht, um eine Behauptung abzuweisen. Als Beispiele könnte man die Aufgaben mit Figurenaufstellung oder die Aufgaben mit dem Rundgang durch das orthogonale Feld nennen.

3. Aufgabe. Drei Fluggesellschaften bedienen auf bestimmten Routen 11 Städte. Aus jeder Stadt kann man hin- und zurückfliegen. Die Fluglinien der Fluggesellschaften doublieren nicht. Man muss beweisen, dass eine von Fluggesellschaften eine zyklische Reiseroute organisieren kann, die in einer und derselben Stadt beginnt und endet, und da gibt es eine ungerade Anzahl der Flüge eingeschlossen, und jede Stadt wird nur einmal besucht.

Bemerkung. Das gegebene Schema des Flugverkehrs kann man mit einem vollen 11 Knotengraph wiederspiegeln, deren Kanten in drei Farben gefärbt sind. Man kann den grössten möglichen Untergraph ansehen, in welchem alle Kanten einfarbig sind. Den Beweis kann man mit dem Theorem von König über zweiteilige Graphen (Емеличев, Мельников, Сарванов. & Тышкевич, 1990) begründen.

4. Aufgabe. Das Eckchen ist eine L – artige Tiomino Figur, die aus drei Zellen besteht. Kann man das Rechteck mit dem Ausmass 5 x 7 mit den Eckchen in mehreren Schichten so bedecken, damit über jeder Zelle des Rechtecks dieselbe Anzahl der Zellen wären, die zu den Eckchen gehören. Die ganze Bedeckung befindet sich im Rahmen des Rechtecks.

Disponierungsaufgaben: Einordnungsaufgaben untersuchen die Aufstellung verschiedener Objekte, z.B. Figuren, Zahlen, Personen u.a., in verschiedenen Typen der Konfigurationen, z.B. in der Kette, im Kreis oder auf der Tabelle. Bei der Aufstellung von Zahlen kann man quantitative Schlussfolgerungen ziehen, wenn man bei der Bewertung auf verschiedene Fakten der elementaren Zahlentheorie stützt, z.B. auf die Parität, Teilbarkeit, Zahlensumme oder auf das Produkt. Wenn man die Objekte anderer Art betrachtet, werden bei den Schlussfolgerungen mögliche Variantenanzahl der Einordnungen verglichen.

5. Aufgabe. Die Regierung hat 12 Abgeordneten. Unter ihnen sind 4, die einander nicht leiden können. Kann man alle 12 Abgeordneten in die Ausschüsse einteilen, damit in jedem Ausschuss genau 4 Abgeordneten sind, damit jeder Deputierte in genau 2 Ausschüssen arbeitet, damit zwei Abgeordneten gleichzeitig nur in einem Ausschuss arbeiten, und damit in keinem Ausschuss keine 2 Feinde gibt?

Bemerkung. Die Einteilung der Deputierten in die Ausschüssen kann man mit Hilfe von Oktaeder wiederspiegeln. Wenn man eine x-beliebige von 4 Kanten der Oktaeder betrachtet, gibt es zwischen ihnen wenigstens zwei Kanten, die eine gemeinsame Spitze haben.

Aufgaben, bei denen die gegebenen Systeme untersucht werden: Es wird da festgestellt, ob die Eigenschaften der Systeme im Laufe der fixierten Zeitmomenten sich bewahren. Bei der Aufgabenlösung kann man das

Schubfachprinzip in einer verallgemeinerten Art anwenden. Man muss die Dauer des Veränderungsprozesses oder das Feld des Tätigkeitsprozesses auswerten.

6. Aufgabe. Auf jedem infinitesemalen karierten Papier in jeder Zelle befindet sich ein Pfeilchen, dass in die Richtung der neben befindenden Zelle gerichtet ist. Auf dem karierten Papier befindet sich ein Roboter, der nach der Richtung des Pfeiles aus einer Zelle in die andere steigt. In der Zelle, aus welcher gerade der Roboter ausgestiegen ist, richtet sich das Pfeilchen um 90 Grad im Uhrzeigersinn. Man muss beweisen, dass der Roboter aus der fixierten Zelle des karierten Papiers bei jeder Konfiguration der Pfeilchen in die Entfernung von wenigstens einer Million Zellen sich begeben kann.

Anmerkung

Eine analytische Forschung der Materialien in der Mathematik gibt dem Lehrer die Möglichkeit die Lehrmetoden hervorzuheben, die den Schülern besser die Grundlagen der Kombinatorik zu verstehen. Eine genauere Analyse der Aufgaben ermöglicht:

- universale Aufgabenlösungsmethoden zu erschliessen;
- die Prinzipien der Zusammenstellung von Beispielen zu geachten;
- entsprechende Erklärungen zu wählen;
- den Sinn der Aufgabe zu beachten, das bedeutet, - man muss feststellen, welche mathematische Tatsache im gegebenen Beispiel wiedergespiegelt wird.

Die selbstständige Arbeit von Schülern, wenn man detailliert die speziellen Einzelfälle der Kombinatorikaufgaben betrachtet, auch, wenn man die Fertigkeiten und Fähigkeiten bei der Verallgemeinerung der Beurteilungsmethoden aneignet – das alles ist eine wichtige Voraussetzung, um gute Leistungen bei den Mathematikolympiaden zu zeigen.

Literatur

Васильев, Н.Б., Егоров А.А. (1988). *Задачи всесоюзных математических олимпиад.* Москва, Наука.

Емеличев, В.А., Мельников, О.И., Сарванов, В.И. & Тышкевич, Р.И. (1990). *Лекции по теории графов.* Москва, Наука.

Ferneyhough, S., Haas, R., Hanson, D. & MacGillivray, G. (2002). *Star Forests, Dominating Sets and Ramsey-type Problems.* Discrete Math., Vol. 245, No. 1.

Lovasz, L., Pelikan, J., Vesztergombi, K. (2005). *Discrete Mathematik.* Berlin: Springer – Verlag.

Die elektronische Sammlung der Aufgaben von Mathematik Olympiaden Lettlands. Erhalten am März, 2009 von: http://nms.lu.lv/arhiivs/uzdarh.shtml