

Thilo HÖFER, Schwäbisch Gmünd

Einführung des Funktionsbegriffs in der Sekundarstufe I

Ausgangssituation und didaktische Grundlagen

Nicht zuletzt aufgrund der Ergebnisse aus den TIMSS- und PISA-Studien gibt es Forderungen nach Unterrichts-Qualitätsmerkmalen wie das Lernen in realen Kontexten, die Verstärkung der Selbsttätigkeit und damit verbunden der aktiven Aneignung, das vernetzte und fächerübergreifende Lernen (vgl. Leuders 2005, S. 63). In PISA 2003 (S.173) zeigte sich zudem, dass die Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, Probleme zu lösen, nicht im Einklang mit den erreichten mathematischen Fähigkeiten geht. Dies ist ein Problem, das schon vor PISA erkannt und von Kaput (1994) als „Insel-Problem“ bezeichnet wurde. Auch im Bereich der Funktionenlehre tritt das Insel-Problem auf (Michelsen & Beckmann 2007, S. 45):

Am Beispiel des Funktionsbegriffs lässt sich das Insel-Problem in der (scheinbaren) Trennung zwischen mathematischen und empirischen Funktionen fassen, indem erstere durch algebraische Terme definiert sind und letztere – im Unterschied dazu – Alltagserfahrungen beschreiben.

In der Folge davon muss eine problemangewandte Mathematik in den Unterricht integriert werden, die nicht nur zur Problemlösung, sondern auch zur Weiterentwicklung der mathematischen Fähigkeiten genutzt wird. Eine Möglichkeit für solch eine Mathematik bietet der Unterricht von Funktionen und funktionalen Zusammenhängen mit Hilfe eines fächerübergreifenden Unterrichts zur experimentellen Physik. Michelsen (2006, S. 274) sieht in einem entsprechend angelegten, fächerübergreifenden Vorgehen eine wichtige Alternative zum herkömmlichen, von algebraischen Notationen dominierten Mathematikunterricht. In der vorliegenden Arbeit wurde die Erfüllung solcher Forderungen innerhalb der Einführung von Funktionen im Mathematik-/Physikunterricht von siebten Klassen am Gymnasium durchgeführt und getestet. Ziel war es, den Unterricht durch Bezug zu eingängigen Schülerexperimenten (vgl. Beckmann 2006 & 2003) anwendungsorientiert zu gestalten und an der Auswertung der Messwerte mathematische Ideen und Kompetenzen zu entdecken bzw. aufzubauen. Um ein umfassendes funktionales Denken zu fördern, wurde die Konzeption anhand des Hauses des funktionalen Denkens (vgl. Höfer 2006 & 2008, sowie Abb. 1) durchgeführt, welches die zu bedenkenden und zu fördernden grundlegenden Fähigkeiten zum funktionalen Denken abbildet.

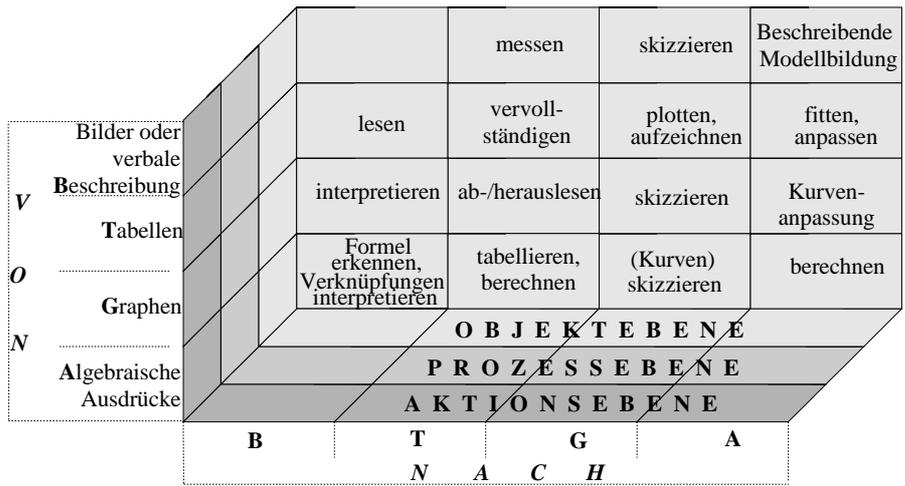


Abb. 1:
Das Haus des funktionalen Denkens

Einführung in die Funktionenlehre durch Schülerexperimente

Eine grundlegende Idee der Sequenz ist es, die Schülerinnen und Schüler zunächst selbst die funktionalen Zusammenhänge zwischen experimentellen Messgrößen finden und beschreiben zu lassen, bevor die typischen Eigenschaften im Umfeld von Funktionen (wie z.B. die Steigung) durch den Lehrer eingeführt werden. Dadurch bietet sich die Chance, dass die Schülerinnen und Schüler gängige Eigenschaften selbst entdecken und beschreiben, so dass der Lehrer diese Entdeckungen nur „ernten“ und eventuell mit den exakten Bezeichnungen aus der Fachsprache versehen muss. Die vorliegende Unterrichtssequenz gliedert sich deshalb in zwei Teile. Als Vorkenntnis benötigen die Schülerinnen und Schüler lediglich das Wissen, wie man Messergebnisse zweier Größen tabellarisiert und in ein Koordinatensystem überträgt.

Den ersten Teil der Sequenz bildet eine siebenstündige Gruppenarbeit, in deren Verlauf jede Gruppe einen physikalischen Versuch durchführt und auswertet. Während der Auswertung werden die im Versuch beteiligten Messgrößen auf Zusammenhänge innerhalb der verschiedenen Darstellungsformen untersucht. Anschließend werden Verknüpfungen zwischen diesen, in den verschiedenen Darstellungen gefundenen, Zusammenhängen gesucht.

Im zweiten Teil werden die in der Gruppenarbeit entdeckten Zusammenhänge und Eigenschaften systematisch kategorisiert. Dabei wird die Reihenfolge nach den Funktionsklassen gewählt (proportional – antiproportional – linear). Dies hat den Vorteil, dass die Zusammenhänge zwischen den einzelnen Darstellungsformen innerhalb einer Funktionsklasse direkt sichtbar gemacht werden können. Wichtigstes Prinzip in diesem zweiten Teil ist es, so viele Entdeckungen wie möglich aus dem

ersten Teil aufzugreifen. Dies gelingt zum Beispiel, indem die auf den Arbeitsblättern präsentierten Aussagen und Entdeckungen vorwiegend aus der Gruppenarbeit entnommen werden. So wird den Schülerinnen und Schülern verdeutlicht, dass hier mit ihren eigenen Ergebnissen gearbeitet wird, sie also selbst die Entdecker dieser Zusammenhänge sind. Dadurch erhalten sie einen Bezug zum Unterrichtsgegenstand, durch den nicht zuletzt die Angst vor den neuen Inhalten genommen werden kann.

In der folgenden Tabelle wird eine Übersicht über die einzelnen Stunden der Sequenz gegeben:

Stunde	Inhalt
1	Umgang mit Messfehlern bei der Auswertung von Messreihen.
2 – 5	Durchführung der Schülerexperimente in Gruppen.
6 – 7	Präsentation und Besprechung der Ergebnisse, Interpretation der verschiedenen Darstellungen aus dynamischer Sicht.
8 – 9	Einführung: Terme zu verbal formulierten Gesetzmäßigkeiten
10	Definition: Proportionale Funktion (verbale Beschreibung).
11	Proportionale Funktionen im Koordinatensystem darstellen, Steigung(-sdreieck) von Geraden im Koordinatensystem.
12 – 13	Proportionale Funktionen in Tabellen darstellen, Tabellen systematisch untersuchen.
14 – 18	Antiproportionale Funktionen und Lineare Funktionen: Definitionen, Eigenschaften der Darstellungsformen und Bezug zu Anwendungen.

Erfahrungen aus der Erprobung in der Unterrichtspraxis

Es zeigte sich, dass sehr viele Ergebnisse (bis hin zum Steigungsdreieck) von den Schülerinnen und Schülern während der Gruppenarbeit selbst entdeckt wurden. Als richtig und für Wiederholungen der Einheit wichtig war es, dass die Ergebnisse auf den Arbeitsblättern als Scans aufgenommen wurden und von so vielen verschiedenen Gruppen wie möglich stammten. Im Unterricht gab es bei jedem Arbeitsblatt ein stolzes „Das ist von uns!“, wenn eine Gruppe ihre eigene Schrift und Resultate wiedererkannte. Dadurch wurden nicht nur die Schüler dieser Gruppe sehr stark für die weiteren Aufgaben des Arbeitsblatts motiviert. Außerdem war der Zugang angstfreier als sonst, da den Schülerinnen und Schülern klar war, dass sie die Entdecker waren, der Sachverhalt also für jeden „kاپierbar“ ist.

Aufgrund der ständigen Verknüpfung zu den durchgeführten Experimenten konnte des Weiteren ein Bezug zwischen der abstrakten mathematischen Behandlung von Funktionen und der erfahrbaren experimentellen Realität hergestellt werden. In dessen Folge stellte sich ein sehr gutes Verständnis für die anschauliche Bedeutung der Darstellungen von Funktionen ein. So konnten beispielsweise Steigungen von Graphen ohne Schwierigkeiten als Geschwindigkeiten interpretiert, die Konvergenz eines Hyperbelastes gegen die x-Achse aus dem Zusammenhang zwischen Druck und Volumen begründet und die Verschiebung einer Geraden aufgrund eines additiven Gliedes im Term aus der Berücksichtigung der Federlänge ohne angehängte Masse erklärt werden.

Insgesamt zeigen unsere Erfahrungen, dass diese Unterrichtseinheit – neben den genannten positiven motivationalen und emotionalen Faktoren – insbesondere den im Insel-Problem geschilderten Schwierigkeiten entgegentritt und so den Schülerinnen und Schülern zu einem guten Verständnis der abstrakten Mathematik in empirischem Umfeld verholfen wird.

Zusatzmaterial

Eine detailliertere Beschreibung, sowie ausführliches Unterrichtsmaterial (Arbeitsblätter und Folien) sind zu finden unter:

www.sciencemath.ph-gmuend.de

->Teaching material -> Introduction to theory of functions

Literatur

- Beckmann, A. (2006): Experimente zum Funktionsbegriffserwerb. Köln: Aulis Verlag Deubner.
- Beckmann, A. (2003): Fächerübergreifender Unterricht, Teil 2 (Physik). Berlin: Franzbecker.
- Höfer, Th. (2006): Funktionales Denken ganzheitlich fördern. Beiträge zum Mathematikunterricht 2006, Franzbecker, Hildesheim.
- Höfer, Th. (2008): Das Haus des funktionalen Denkens - Entwicklung und Erprobung eines Modells für die Planung und Analyse methodischer und didaktischer Konzepte zur Förderung des funktionalen Denkens. Erscheint vsl. 07/2008 im Verlag Franzbecker.
- Kaput, J. (1994): The representational roles of technology in connecting mathematics with authentic experience. In Biehler et. al. (eds.) *Mathematics didactics as a scientific discipline* (pp. 379-397). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers
- Leuders, T. (2.Auflage, 2005): Qualität im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II. Berlin: Cornelsen Verlag Scriptor.
- Michelsen, C.; Beckmann, A. (2007): Förderung des Begriffsverständnisses durch Bereichserweiterung – Funktionsbegriffserwerb und Modellbildungsprozesse durch Integration von Mathematik, Physik und Biologie. In: MU – Der Mathematikunterricht 53, 1/2, S. 45 - 57.
- Michelsen, C. (2006): Functions: a modelling tool in mathematics and science. In: ZDM, Vol 38(3), S. 269-280.
- PISA (Deutsches Pisa Konsortium) (2003): PISA 2003: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs – Zusammenfassung.