

Dagmar BERTALAN, Essen

## Die Rolle verschiedener Repräsentationsformen in einem ersten Zugang zu linearen Gleichungen


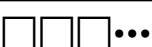
Eine vierwöchige Unterrichtsreihe zur anschauungsgestützten Einführung von Variablen, Termen und Gleichungen in Klasse 7 stellt die Grundlage des Projektes dar, aus dem hier berichtet werden soll. In der Unterrichtsreihe arbeiten die Schülerinnen und Schüler über lange Zeiträume hinweg in festen Vierergruppen zusammen. Die Arbeit je zweier Gruppen in drei Versuchsklassen wurde während der gesamten Unterrichtsreihe durch Videoaufzeichnungen dokumentiert, um sie im Anschluss interpretativ analysieren zu können.

In diesem Aufsatz soll am Fallbeispiel einer Mädchengruppe dargestellt werden, welche Rollen verschiedene Repräsentationsformen bei der Bearbeitung der handlungsorientierten Einstiegsaufgabe zum Thema Gleichungen spielen.

### Die Aufgabe

Zur Bearbeitung der Aufgabe haben die Schülerinnen einige weiße und einige mit einem schwarzen Punkt beklebte Streichholzschachteln sowie einen Vorrat an getrockneten weißen Bohnen bekommen. Bei der Aufgabe handelt es sich um eine modifizierte Version der ersten Aufgabe der Lernumgebung *Knack die Box* im mathbu.ch 7 (Affolter, W. u. a., 2003, S. 32/33). Die Aufgabenstellung lautet:

*Legt mit Bohnen und leeren Boxen die beiden folgenden Anordnungen:*

Anordnung A	Anordnung B
	

*Füllt die Boxen so, dass folgende Bedingungen erfüllt werden:*

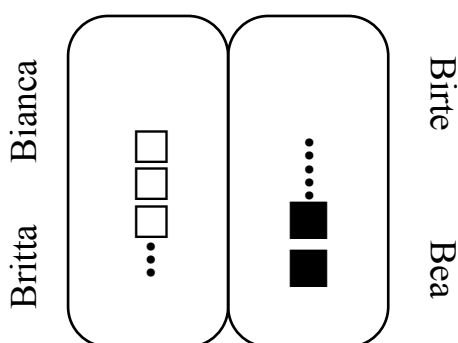
- In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden (insgesamt, d. h. die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt).*
  - In Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen.*
- Wie viele Bohnen können in den schwarzen bzw. in den weißen Boxen liegen? [...] <sup>1</sup>*

*Vielleicht helfen Euch Tabellen der folgenden Art beim übersichtlichen Aufschreiben Eurer Ergebnisse!*

<i>Anz. der Bohnen in einer schwarzen Box</i>							—
<i>Anz. der Bohnen in einer weißen Box</i>							—

<sup>1</sup> Es wurde eine Teilaufgabe ausgelassen, die nicht Gegenstand des Aufsatzes ist.

## Eine erste Lösung durch Probieren



Vor Beginn der Episode, die betrachtet werden soll, haben die Schülerinnen gemäß der Aufgabenstellung bereits mit Bohnen und leeren Boxen die Anordnungen auf den Tisch gelegt. Schematisch dargestellt ergab sich auf diese Weise das nebenstehende Bild. Die Boxen sind geschlossen. Die Episode beginnt damit, dass Birte vom Arbeitsblatt vorliest: „Füllt die Boxen so, dass

folgende Bedingungen erfüllt werden. In beiden Anordnungen sind gleich viele Bohnen vorhanden, insgesamt, das heißt die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt.“ Die erste Bedingung wird dann von Bianca paraphrasiert:

- 31 Bianca Also, in beiden Anordnungen, also in den beiden Sachen (*zeigt abwechselnd auf die beiden Boxenanordnungen auf dem Tisch*) sind gleich viele Bohnen Bohnen vorhanden
- 32 Bea Stimmt doch gar nicht.
- 33 Bianca Nö.
- 34 Britta Check ich nicht wirklich.

Die Boxen werden in dieser Szene nicht als Variable wahrgenommen, sondern als konkrete leere Objekte. Die Schülerinnen wissen, dass sie leere Boxen auf den Tisch gelegt haben. Sie verstehen Bedingung (1) der Aufgabe als Aussage und stellen dann richtigerweise fest, dass diese auf die konkreten Anordnungen auf dem Tisch - mit den leeren Boxen - nicht zutrifft.

Im Anschluss an diese Szene liest Bianca noch einmal vor: „Insgesamt, das heißt die einzelnen Bohnen und die Bohnen in den Boxen zusammengezählt.“ Dadurch scheint ihr klar zu werden, dass noch Bohnen in die Boxen gelegt werden müssen. Sie stellt daraufhin fest, wie viele Bohnen in den Anordnungen draußen liegen. Folgende Szene schließt an<sup>2</sup>:

- 37 Bea Dann müssen da noch ähm drei rein (*zeigt auf die weißen Boxen*)
- 38 Bianca Dann müssen (*1 sec. Pause*) ja, aber # hier (*zeigt auf eine schwarze Box*) müssen ja auch noch in den Boxen welche rein. In jeder Box muss auf jeden Fall eine Bohne sein
- 39 Britta # Zwei  
[...]
- 42 Bea Wart mal. Zweitens, in Boxen gleicher Farbe liegen jeweils gleich viele Bohnen

<sup>2</sup> Die Rauten im Transkript zeigen an, dass Britta Bianca ins Wort fällt.

Den Schülerinnen scheint hier nun klar zu sein, dass sie herausfinden sollen, wie viele Bohnen man in die Boxen legen muss, damit Bedingung (1) erfüllt ist. Da Bea in <42> auch noch die zweite Bedingung der Aufgabenstellung ins Spiel bringt, erhalten die Boxen nun Variablencharakter für die Schülerinnen: sie verkörpern gesuchte Unbekannte<sup>3</sup>.

Bea knüpft an ihren Beitrag aus <42> an: Sie öffnet die schwarzen Boxen ein Stück <44 - 46> und sagt <44>: „Hier müssen gleich viele Bohnen drin liegen.“ Das Öffnen der Boxen deutet an, dass noch etwas passieren muss. Es liefert damit ein Bild für die gesuchten Unbekannten. In <46>, also noch während Bea dabei ist, die schwarzen Boxen zu öffnen, setzt Bianca zu einem Vorschlag an, macht dann jedoch einen Rückzieher und beginnt stattdessen, die weißen Boxen zu öffnen. Währenddessen überlegen Britta und Birte, was passiert, wenn man in die schwarzen Boxen je eine Bohne legen würde. Sie führen ihre Überlegung aber nicht zu Ende. Während Bianca die letzte weiße Box öffnet, setzt sie noch einmal zu einer Erklärung an, bricht aber wiederum ab. Während Britta dann noch einmal versucht, ihren Gedankengang auszuführen <56 - 60>, scheint Bianca ihren eigenen Gedanken nachzuhängen und zeigt schließlich erst auf die weißen Boxen und dann auf die einzelnen Bohnen in Anordnung B. Dann hat sie eine Lösung gefunden <61>:

Ich hab's. Hier müssen immer zwei rein (*zeigt auf die schwarzen Boxen*), das sind fünf (*zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung A*), das sind sieben (*zeigt in die erste schwarze Box*) und das sind neun (*zeigt in die zweite schwarze Box*). Und hier sind drei (*zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung B*) und wenn hier auch überall zwei kommen (*zeigt auf die weißen Boxen*) sind das sechs (*zeigt auf die weißen Boxen*) und das sind neun (*zeigt auf die einzelnen Bohnen aus Anordnung B*), dann sind das gleich viele.

Biancas Kontext-spezifische Semantik sowie ihr ausgeprägtes Zeigen auf und sogar in Boxen deutet darauf hin, dass die konkrete Darstellung der Situation durch geöffnete Boxen und einzelne Bohnen sie bei der Lösung der Aufgabe entlastet hat.

Im Anschluss stellen die Schülerinnen die gesuchte Situation her, indem sie in jede Box zwei Bohnen legen. Dies zeigt, dass sie den Erfahrungskontext „Boxen und Bohnen“ ernst nehmen. Darüber hinaus wird dadurch das Ergebnis fixiert.

### **Weitere Bearbeitung der Aufgabe**

Durch Probieren finden die Schülerinnen im Anschluss weitere Lösungen, die sie aber nicht mehr durch das Hineinlegen von Bohnen in die Boxen

---

<sup>3</sup> Unterscheidung verschiedener Variablen-Aspekte nach Drijvers (2003): Platzhalter, sich ändernde Größe, Generalisierer, gesuchte Unbekannte und Symbol

konkretisieren. Die Bohnen der ersten Lösung - je zwei in jeder schwarzen und jeder weißen Box - bleiben bis zum Schluss in den Boxen liegen. Die Lösungen werden zunächst auch nicht auf andere Art und Weise fixiert. Die Schülerinnen entwickeln während des Probierens erste Ideen, welcher Zusammenhang zwischen den einzelnen Lösungen bestehen könnte. Die vermuteten Gesetzmäßigkeiten sind zu diesem Zeitpunkt aber nie vollständig. Ihre Anwendung in Verbindung mit Fehlern bei der rechnerischen Überprüfung der generierten Zahlenpaare führt zum Teil zu vermeintlich neuen Lösungen. Eigentlich bereits rechnerisch bestätigte richtige Zahlenpaare werden teilweise wieder angezweifelt. Diese Phase großer Verwirrung mündet letztendlich in den Beschluss, eine Tabelle anzulegen, um die Ergebnisse festzuhalten. Dabei orientieren die Schülerinnen sich an der Beispieltabelle des Arbeitsblattes. Sie tragen ihre bisherigen Ergebnisse  $(2/2)$ ,  $(5/4)$  und  $(8/6)$  ein, wobei  $(8/6)$  vorher noch einmal überprüft wird. Die Tabelle liefert nun die notwendige Übersicht, so dass die Schülerinnen die Gesetzmäßigkeit sofort erkennen: „Die Anzahl der Bohnen in der schwarzen Box steigt immer um drei. Die Anzahl der Bohnen in der weißen Box steigt immer um zwei.“ Sie wenden diese Gesetzmäßigkeit an, um weitere Tabelleneinträge zu erzeugen. Die Lösung  $(11/8)$  wird noch durch Nachrechnen an der Boxensituation überprüft. In der formulierten Gesetzmäßigkeit manifestiert sich ein Wechsel der Variablen-Rolle, der bereits vorher stattgefunden hat: die Schülerinnen sehen die Boxen nicht mehr als gesuchte Unbekannte, sondern als sich ändernde Größen.

Die Rolle der konkreten Boxen hat sich auf zwei Ebenen entwickelt. Bezogen auf den Lösungsprozess hat ein erster Ablösevorgang stattgefunden: die Schülerinnen argumentieren weiterhin in der bereichsspezifischen Semantik des Erfahrungsbereichs, die abschließende Herstellung der gesuchten Situation mit den konkreten Bohnen und Boxen ist aber nicht mehr notwendig, sie bleibt gedanklich. Außerdem hat sich auch die inhaltliche Rolle der Boxen verändert. Während sie in der ersten Phase zunächst nur konkret, dann als gesuchte Unbekannte wahrgenommen wurden, fokussieren die Schülerinnen in der zweiten Phase die Änderung ihres Inhalts. Die Tabelle hat als Übersicht erzeugende Darstellungsmöglichkeit der Ergebnisse in der zweiten Phase der Aufgabenbearbeitung eine Schlüsselfunktion. Erst als die Schülerinnen die Tabelle vor sich haben, erkennen sie die ganze Gesetzmäßigkeit.

## **Literatur**

- Affolter, W. u.a. (2003): mathbu.ch 7. Mathematik im 7. Schuljahr für die Sekundarstufe I. Bern: schulverlag blmv AG und Zug: Klett und Balmer AG. S. 32/33.
- Drijvers, P.H.M.: Learning algebra in a computer algebra environment. Design research on the understanding of the concept of parameter. Utrecht 2003