Astrid FISCHER, Essen

Darstellen mathematischer Strukturen mit Hilfe von zeichnerischen Diagrammen - Beispiele aus Klasse 5

Die Verwendung unseres algebraischen Zeichensystems beruht auf vielen Konventionen, mit denen Schülerinnen und Schüler der Klasse 5 noch nicht vertraut sind. Dennoch sind sie in der Lage, sich mit strukturellen Beziehungen aus einander zu setzen, und haben Möglichkeiten, sie zum Ausdruck zu bringen. Beispielhaft werden in diesem Beitrag verschiedene Wege aufgezeigt, wie eine Schülerin die Idee einer unbestimmten Zahl kommuniziert.

Das Forschungsprojekt

Lange Zeit waren Mathematikdidaktiker der Ansicht, dass Kinder bis 12 oder 13 Jahren nicht in der Lage seien, Algebra zu verstehen, weil ihre kognitiven Möglichkeiten noch nicht ausreichend ausgebildet seien. In den vergangenen zwei Jahrzehnten wurden jedoch vermehrt Ansätze entwickelt, jüngere Schüler auf die Bedeutung und den Gebrauch der algebraischen Sprache vorzubereiten.[1]

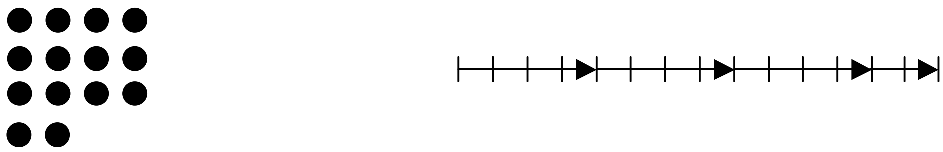
Mein Forschungsprojekt stellt die Frage nach Fähigkeiten algebraischen Denkens, das Schülerinnen und Schüler der Jahrgangsstufe 5 besitzen, und nach Möglichkeiten, dieses auszubauen. Damit überhaupt Hinweise darauf beobachtet werden können, brauchen die Kinder Anlässe zur Auseinandersetzung mit algebraischen Fragestellungen. Dazu wurde eine Lernumgebung entwickelt, die eine Perspektive von Algebra als Generalisierung[2] von beobachteten Phänomenen einnimmt: Ausgangspunkt ist die Beschäftigung mit arithmetischen Aufgaben, die sich strukturell gleichen. Diese bergen ein Potential für höhere Betrachtungsebenen: Zunächst liegen Beschreibungen der Gemeinsamkeiten der Aufgabenstellungen nahe und es können die Wirkungen der Rechenoperationen, welche sich in den Aufgaben gleichen, untersucht und erörtert werden. Sodann bietet diese Beschäftigung Raum für die Entwicklung von Vorstellungen zu Variablen, und Variablenterme können der gemeinsamen Repräsentation strukturgleicher Rechenaufgaben dienen.

[1] In Malle (1993) werden z.B. im Gegensatz zur bis dahin üblichen Praxis Vorschläge zur Einführung von Variablen im 5. und 6. Schuljahr gemacht. Vgl. S. 15 und 65 – 78.
[2] Vgl. die Einteilung von Bednarz, Kieran und Lee (1996) von Zugängen zur elementaren Algebra in die vier Kategorien des Verallgemeinerns, Problemlösens, Modellierens und der Funktionen.

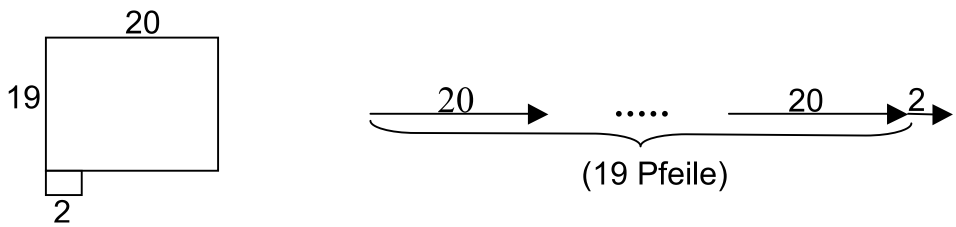
Die Lernumgebung

Die Kinder werden in einer Einführungsphase mit zwei Darstellungsarten für arithmetische Aufgaben vertraut gemacht, die ihnen zumeist aus dem Grundschulunterricht bekannt sein dürften: Das erste sind Punktmuster, das zweite Pfeilsequenzen am Zahlenstrahl. Beide respektieren die Strukturen der natürlichen Zahlen, also die Rechengesetze für die Operationen + und ·, und sind daher Diagramme im Sinne von Ch. Peirce[3], an denen durch regelkonforme Transformationen Erkenntnisse gewonnen werden können. Sie eignen sich daher zur Untersuchung von Rechenaufgaben:

Als Beispiel zur Demonstration der beiden Darstellungsarten wird hier die Aufgabe 3·4+2 veranschaulicht:



Nachdem die Kinder in der Einführung anhand kleinerer Übungen diese Darstellungsweisen kennen lernen, beschäftigen sie sich in einer zweiten Teilsequenz mit einer ersten umfangreicheren Fragestellung: sie vergleichen Produktpaare wie 8·6 und 7·7 und suchen nach Gründen, warum das Quadrat genau eins größer ist als das Produkt aus den beiden benachbarten Zahlen.[4] In dieser Teilsequenz werden die Darstellungen für größere Zahlen weiterentwickelt. 19·20+2 etwa kann nun so dargestellt werden:



Die anschließende, dritte Teilsequenz greift ein anderes Thema auf. Hier erhalten die Kinder Päckchen von Rechenaufgaben, die sich bis auf eine Zahl gleichen. In der ersten Aufgabe zu dieser Sequenz lauten sie:

---

[3] Eine ausführliche Darstellung des diagrammatischen Denkens bei Charles Peirce wird von Hoffmann (2005) gegeben.
[4] Eine detailliertere Darstellung dieser Aufgaben ist in Fischer (2007) gegeben.

$(5 \cdot 2+4):2$ $(11 \cdot 2+4):2$ $(36 \cdot 2+4):2$

$(19 \cdot 2+4):2$ $(28 \cdot 2+4):2$ $(849 \cdot 2+4):2$

Löst man diese Aufgaben mit dem Distributivgesetz für Division, so erkennt man: Das Ergebnis ist immer zwei größer als die variable Zahl. Die Kinder werden aufgefordert, die Lösungen zu bestimmen und zu erklären, woran es liegt, dass immer zwei mehr als die erste Zahl herauskommt. Diese Erklärung kann anhand der formal-arithmetischen Darstellungen oder auch mit Hilfe von Zeichnungen geschehen.

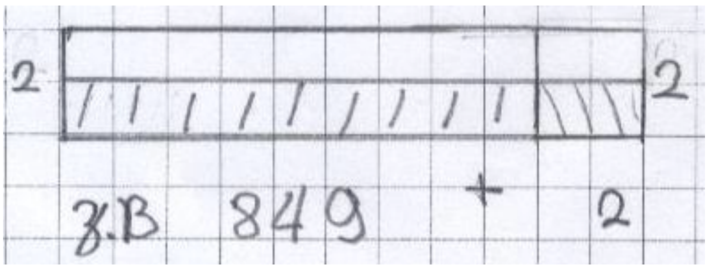
Die Lernumgebung wurde in mehreren Gymnasialklassen durchgeführt und der Unterricht mit Videokamera beobachtet. Der folgende Abschnitt zeigt die Lösung einer Schülerin zum ersten Arbeitsblatt in der dritten Teilsequenz.

Lauras Darstellung

Zu den Rechenaufgaben selbst hat Laura nur die Ergebnisse notiert, zu einer Aufforderung „Das fällt uns auf:" steht auf ihrem Arbeitsblatt:

Die erste Zahl + 2 ist das Ergebnis.

Das Aufgabenblatt fordert zudem auf: „Zeichnungen dazu:" Hier sieht man bei Laura:



Einen Teil dieses Arbeitsblattes hat Laura zuhause bearbeitet. In der folgenden Mathematikstunde stellt sie ihre Zeichnung an der Tafel vor. Eine ausführliche Analyse dieser Ausführungen ist hier jedoch nicht möglich. Wir konzentrieren uns auf die schriftlichen Darstellungen.

Hinweise auf die Idee einer unbestimmten Zahl bei Laura

Lauras allgemeine Darstellung der Rechenergebnisse ist zutreffend und prägnant. Jemand, der mit dem algebraischen Zeichensystem vertraut ist, würde die Aufgabenstellungen etwa mit der Darstellung $(x \cdot 2+4):2$ zusammenfassend beschreiben und dann als Ergebnis $x+2$ angeben. Laura verwendet anstelle einer solchen Variable x die verbale Beschreibung „die erste Zahl". Diese Bezeichnung benennt die wesentliche Eigenschaft der Zahlen, für die sie steht, nämlich ihre Position im Aufgabenterm und damit ihre Beziehung zu den verwendeten Operationen. Mit dieser Zahlbezeichnung „die erste Zahl“ geht Laura sodann in ganz derselben Weise um wie es mit der Variablen x üblich ist: sie wendet die Operation „+2“ auf sie an. Dabei betrachtet sie den Ausdruck „die erste Zahl + 2“ nicht als eine Rechenhandlung, sondern bezeichnet ihn als Ergebnis. Dies ist ein Hinweis darauf, dass sie in ihm eine Zahl mit einem bestimmten Bauplan sieht. Es entspricht der algebraischen Sichtweise, „x+2“ als eine (von x abhängige) Variable zu verstehen.

Trotz des Plurals in der Aufforderung „Zeichnungen dazu“ fertigt Laura nur eine einzige Zeichnung an. Mit der Zeichnung hebt Laura die gemeinsame Struktur der Rechenaufgaben hervor: Ein Streifen – er hat die Länge von neun Kästchen – steht für die variable Zahl in den Aufgabentermen. Seine Länge ist nicht besonders gekennzeichnet, so dass ihm eine bestimmte Zahl zuzuordnen wäre. Allerdings ist er mit „z.B. 849“ beschriftet. Laura gibt hier eine mögliche Spezifizierung der unbestimmten Länge des Streifens an und betont zugleich, dass dies nur eine Möglichkeit ist. Die Höhe des Rechtecks von zwei Kästchen hingegen wird durch die Beschriftung rechts und links betont, ebenso wird die Breite des hinteren Abschnitts mit „2“ festgelegt. Laura unterscheidet auf diese Weise in ihrer geometrischen Darstellung zwischen Zahlen, die die Rolle von Konstanten einnehmen, und Zahlen, die variabel sind. Dies geschieht in der oben gegebenen formal-algebraischen Darstellung $(x\cdot 2+4):2$ durch die Verwendung von Zahlzeichen für konstanten Zahlen und die Verwendung eines Buchstabens für die variable Zahl.

Literatur:

Bednarz, N.; Kieran, C. & Lee, L. (Hrg) (1996): Perspectives for Research and Teaching. Dordrecht: Kluver Academic Publishers 1996.

Fischer, A. (2007): Einzelfall und Struktur – Verwendung von Anschauungshilfen zur Erfassung arithmetischer Gesetzmäßigkeiten. In: Beiträge zum Mathematikunterricht. Franzbecker: Heidelberg, S. 120 – 123.

Hoffmann, M. (2005): Erkenntnisentwicklung. Frankfurt a. M.: Vittorio Klostermann 2005.

Malle, G. (1993): Didaktische Probleme der elementaren Algebra. Braunschweig: Viehweg 1993.