

Sandra GERHARD, Frankfurt

Algebra in der Grundschule - Von konkreten Größenvergleichen zu abstrakten Gleichungen

Algebra in der Schule

In Deutschland wie in anderen Ländern wird traditionell Algebra erst nach einer langjährigen arithmetischen Ausbildung als „generalised arithmetic“ (vgl. LINS & KAPUT 2004) in den Schulen eingeführt. Dies begründet sich zum einen dadurch, dass sich historisch gesehen vor allem die neuzeitliche Algebra aus der Arithmetik entwickelt hat, obwohl es auch eine geometrische Wurzel der Algebra gibt. Zum anderen basiert diese Reihenfolge auf der Piagetschen Stufentheorie, nach der ein Kind erst ab dem zwölften Lebensjahr in das formaloperationale Stadium übertritt (vgl. PIAGET & INHELDER 1972), das für das algebraische Denken als generalisiertes und formalisiertes arithmetisches Denken eine zwingende Voraussetzung ist.

Aber auch wenn Schülerinnen und Schüler erst ab dem zwölften Lebensjahr beginnen, sich mit der Algebra auseinander zusetzen, haben Schülerinnen und Schüler erhebliche Probleme mit dieser Disziplin. Wenn LINCHEVSKI (2001) von einer Trennung von Arithmetik und Algebra durch ein „cognitiv gap“ sprechen, erinnert dies zunächst an Piaget. Aber

„the notion cognitive gap is reserved to these steps in the pupil's learning experience where without a teaching intervention [...] he or she would not make a certain step.“ (LINCHEVSKI 2001, S. 144)

Dies bedeutet, dass sich die Arithmetik den Schülerinnen und Schülern auf natürliche Weise erschließen kann, während die Algebra konkreter Unterrichtsgegenstand sein muss, damit sich algebraisches Denken entwickelt. Ein wichtiger Unterschied zu Piaget liegt darin, dass das Vorhandensein eines „cognitiv gap“ nicht einer frühen Behandlung von Algebra in der Schule widerspricht. Das erfolgreiche Erlangen von algebraischen Kenntnissen ist nicht mehr primär abhängig von der geistigen Fähigkeit der Schülerinnen und Schüler, sondern vielmehr von der Qualität der Vermittlung algebraischer Fähigkeiten.

Early Algebra

Die Idee der Vermittlung von algebraischem Denken vor dem zwölften Lebensjahr trifft auf fruchtbaren Boden. Es werden zwei unterschiedliche Ansätze verfolgt (vgl. CARRAHER & SCHLIEMANN 2007). Die Pre-Algebra legt

den Schwerpunkt darauf, den Übergang zwischen Arithmetik und Algebra zu erleichtern, in dem schon vor dem eigentlichen Algebra-Unterricht verschiedene Interventionen gestartet werden. Sie setzt also kurz vor dem eigentlichen Algebra-Unterricht an.

Die Early Algebra hingegen sieht die Arithmetik als Teil der Algebra und vermutet die Ursache der Probleme mit der Algebra unter anderem darin, dass der Arithmetik-Unterricht zu lange ohne algebraische Elemente auskommen muss. Deshalb setzt sie den Algebra-Unterricht innerhalb oder vor der Arithmetik an, zum Beispiel durch Förderung von arithmetischem und numerischem Argumentieren oder Umdeutung von arithmetischen Operationen zu Funktionen.

Das Measure-Up-Programm

Einen ungewöhnlichen Weg innerhalb der Early Algebra geht das Measure Up-Programm (vgl. DOUGHERTY & SLOVIN 2004). Das Programm basiert auf einem Unterrichtsversuch von DAVYDOV (1975) aus den sechziger Jahren. Im Rahmen dieses Unterrichtsversuchs wird abstraktes algebraisches Denken über Größen und Größenvergleiche bereits in der ersten Klasse noch vor den natürlichen Zahlen behandelt. Dazu werden von den Schülerinnen und Schülern zunächst konkrete Längen-, Flächen-, Volumen- und Massenvergleiche durchgeführt und die Größen anschließend zunächst durch unterschiedlich große Zeichen und schließlich durch Buchstaben abstrahiert und verschriftlicht. Erst dann erfolgt der Einstieg in die natürlichen Zahlen, die von den bereits erlernten symbolischen Darstellungen begleitet wird.

Forschungsvorhaben

Das Forschungsvorhaben setzt am MeasureUp-Programm an und versucht, die Idee der EarlyAlgebra auf deutsche Schulen bzw. Schülerinnen und Schüler zu übertragen, um dadurch mehr über das Lernen von Algebra durch Schülerinnen und Schüler zu erfahren. Da Algebra in Deutschland nicht Teil des Grundschulkurriculums ist und die Durchführung des MeasureUp-Programms einen längeren Zeitraum in Anspruch nimmt, kam ein Unterrichtsversuch während des regulären Unterrichts in einer staatlichen Grundschule zunächst nicht in Frage. Als Alternative bot sich an, das Programm an einer (Privat-)Schule mit einem hohen Anteil an freiem Unterricht durchzuführen, in diesem Fall in der vorbereiteten Umgebung einer Montessori-Schule.

Aus diesen Rahmenbedingungen, sowie dem Hintergrund und dem Stand der Forschung ergaben sich somit folgende vorläufigen Forschungsfragen:

- Kann das MeasureUp – Konzept methodisch auch als Freiarbeit realisiert werden und funktioniert es in dieser Form für Schülerinnen und Schüler der ersten Jahrgangsstufe / Grundschule in Deutschland?
- Wenn ja, welche Bedingungen müssen dafür vorliegen?
- Gibt es Zusammenhänge zwischen arithmetischen Kenntnissen der Schülerinnen und Schüler und ihrem Zugang zur Algebra?
- In welchen höheren Altersstufen ist das MeasureUp–Konzept noch fruchtbar?

Vorgehensweise

Bei der Klasse, in der das Projekt durchgeführt wurde, handelt es sich um eine jahrgangsgemischte Integrationsklasse 1-3, die von 11 Schülerinnen und 7 Schülern im Alter von 7 bis 11 Jahren, davon 4 Integrationskindern, besucht wird. Der Unterricht findet überwiegend in Freiarbeit statt, gemeinsame Aktivitäten sind selten. Dies ermöglicht es, einzelne Schülerinnen und Schüler sowie kleine Schülergruppen abgetrennt von den übrigen Schülerinnen und Schülern zu unterrichten.

Da ein Forschungsgegenstand der Zusammenhang zwischen arithmetischen Kenntnissen und Zugang zur Algebra ist, werden zunächst grundlegende Arithmetik-Kenntnisse der Schülerinnen und Schüler, wie Zählen, Kenntnis des Stellenwertsystems, sowie Strategien bei den vier Grundrechenarten mittels des ElementarMathematischen BasisInterviews (EMBI) überprüft (vgl. PETER-KOOP, A. ET AL. 2007). Anschließend wird das Thema Algebra allen Schülerinnen und Schülern vorgestellt und Freiarbeitshefte inklusive Material den Schülerinnen und Schülern frei zugänglich gemacht. Die Freiarbeitshefte sollen dabei folgende Kriterien erfüllen: Sie sollen eng an MeasureUp angelehnt sein, Montessori-Material und anderes Material mit einbeziehen, möglichst selbständig bearbeitet werden, sowie für alle Kinder der Klasse geeignet sein sollte. Bei Bedarf werden die Schülerinnen und Schüler bei der Bearbeitung der Aufgaben in den Freiarbeitsheften einzeln oder in Kleingruppen betreut.

Erste Ergebnisse

Das EMBI ergab einen sehr heterogenen Kenntnisstand der Klasse in Arithmetik, mit der zu erwartenden Differenz zwischen den einzelnen Jahrgangsstufen. Das erste Freiarbeitsheft behandelt zunächst nur konkrete Längen-, Flächen- und Volumenvergleiche bis zur Abstraktion der Größen durch unterschiedlich große Zeichen, also noch keine Abstraktion durch Buchstaben und Buchstabengleichungen.

Die Arbeit mit den Schülerinnen und Schülern der ersten Klasse zeigte, dass bereits bei den Größenvergleichen einige Schwierigkeiten auftraten, denen jedoch mit intensiver Lehrerintervention begegnet werden konnte. Mit zunehmendem Alter fiel es den Schülerinnen und Schülern hingegen nicht schwer, die Größenvergleiche mit Zeichen zu abstrahieren und über die Arbeit mit dem Freiarbeitsheft hinaus durch Buchstabengleichungen, auch unter Einbeziehung der Kommutativität, darzustellen.

Ausblick

Auch wenn eine Einführung von abstraktem algebraisches Denken über Größen und Größenvergleiche bereits in der ersten Klassen möglich ist, scheint sie mit einem großen Lehraufwand verbunden zu sein. Zusätzlich stellt sich die Frage, ob es zweckmäßig ist, dass Schülerinnen und Schüler sich bereits in der ersten Klasse mit diesen Inhalten beschäftigen, zumal sich abzeichnet, dass Schülerinnen und Schüler der dritten Klassen weniger Schwierigkeiten mit dem Thema haben und sich dort noch nicht die Probleme abzeichnen, mit denen Schülerinnen und Schüler zu einem späteren Zeitpunkt zu kämpfen haben. Deshalb ist es naheliegend den weiteren Fokus auf Forschungsfrage „In welchen höheren Altersstufen ist das MeasureUp-Konzept noch fruchtbar?“ zu legen. Dazu ist es angedacht, das Konzept auf Klasse 5 zu übertragen. Parallel dazu wird das bereits begonnene Programm in Klasse 1-3 weiterverfolgt.

Literatur

1. CARRAHER, D.W. & SCHLIEMANN, A. D.(2007): Early Algebra and Algebraic Reasoning. In: F.K. Lester (Hrsg.), Second Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the national council of teachers of mathematics, USA: Information Age Publishing Inc.
2. DAVYDOV, V. V. (1975): The Psychological Characteristics of the „Prenumerical“ Period of Mathematics Instruction. In: L. P. Steffe (Hrsg.), Children's Capacity for Learning Mathematics. Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics. Vol. VII. Chicago: University Of Chicago. S. 109-205.
3. DOUGHERTY, B. & SLOVIN, H. (2004): Generalized Diagrams as a Tool For Young Children's Problem Solving. In: Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol 2, S. 295-302.

Weitere Literatur findet sich unter : <http://www.math.uni-frankfurt.de/~gerhard>