Christoph ABLEITINGER, Wien

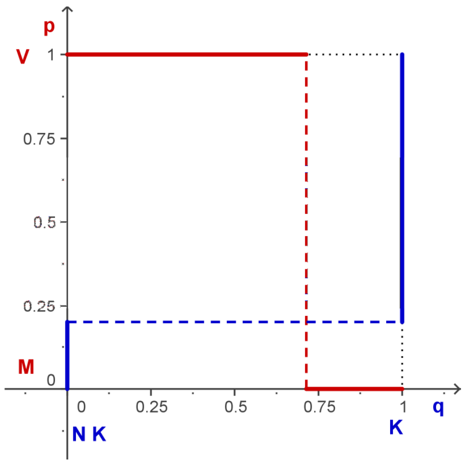
Spieltheoretische Situationen dynamisch betrachtet

Konflikt- und Entscheidungssituationen kommen im Leben meist nicht nur einmalig vor. Ein und dasselbe „Spiel“ wird oft mehrere Male hintereinander ausgetragen. Dieser Artikel beschäftigt sich mit der Frage, wie die Entscheidungen der beteiligten Personen einander von Spiel zu Spiel beeinflussen und welche Strategien sich auf lange Sicht in solchen Prozessen behaupten können. Wir werden außerdem Antworten darauf erhalten, inwiefern Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien als Lösungen von Spielen zu interpretieren sind. Eine Analyse des didaktischen Potenzials soll den Bogen zum Schulunterricht spannen.

Das Lehrerin-Schüler-Hausübung-Spiel

		Lehrerin	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	verweigert	**4** – 1	0 **4**
	macht HÜ	1 **1**	**2** – 1

Die Analyse mit dem Nash-Konzept[1] bringt folgendes Ergebnis:



Es gibt – wie man auch leicht in der nebenstehenden Beste-Antwort-Grafik sieht – kein Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien, dafür aber eines in gemischten Strategien: $(p_{\text{Nash}}, q_{\text{Nash}}) = \left(\frac{1}{5}, \frac{5}{7}\right)$

Wie ist nun aber dieses Nash-Gleichgewicht zu interpretieren? Kann es als Verhaltensempfehlung an die beiden Spieler gesehen werden? Inwiefern kann es überhaupt als Lösung dieses Spiels betrachtet werden?

Um dieser Frage nachzugehen, blicken wir zunächst zurück auf die Vorgehensweise bei der Berechnung des gemischten Nash-Gleichgewichts.

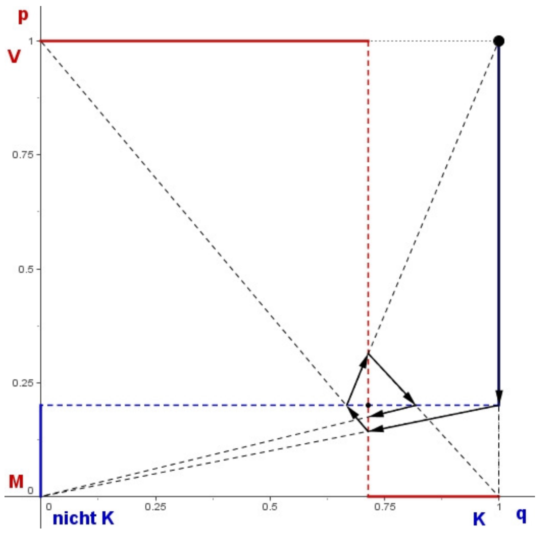
---

[1] Siehe dazu den Artikel „Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie“ von Petra HAUER-TYPPELT in diesem Tagungsband.

Dabei geht man davon aus, dass der Schüler die relative Häufigkeit q kennt, mit der die Lehrerin in der Vergangenheit die Hausübung (HÜ) kontrolliert hat. Der Schüler hat dann, nach Vergleich dieser relativen Häufigkeit q mit q_{Nash} eine 0-1-Entscheidung zu treffen: ist $q < q_{\text{Nash}}$, so sollte er dieses Mal die HÜ verweigern, im anderen Fall sollte er die HÜ machen. Mit dieser Taktik spielt er in jedem Fall die beste Antwort auf die in der Vergangenheit verfolgte Strategie der Lehrerin.

Das iterierte Spiel

Vor dieser 0-1-Entscheidung steht der Schüler nun an jedem Tag. Dabei wird es manchmal dazu kommen, dass er die HÜ verweigert (wenn die Lehrerin fast nie kontrolliert hat) und manchmal dazu, dass er die HÜ macht (wenn die relative Häufigkeit des Kontrollierens gerade sehr hoch ist). Dadurch verändert sich mit jedem Tag auch seine eigene relative Häufigkeit des Verweigerns. Die ganz natürliche Frage ist nun, wie häufig der Schüler auf lange Sicht die HÜ machen wird.



Eine Antwort lässt sich mit Hilfe der Beste-Antwort-Grafik finden. Man startet in einem der vier Eckpunkte des Einheitsquadrates, z. B. im Punkt $(p,q)=(1,1)$. Das bedeutet, dass sich die beiden Spieler am ersten Tag, an dem ja noch keine Erfahrungswerte aus der Vergangenheit vorliegen, willkürlich für Verweigern bzw. Kontrollieren entschieden haben. Auf diese Anfangsbedingungen kommt es im vorliegenden Spiel, wie wir gleich sehen werden, aber nicht an.

Die Lehrerin hat an diesem ersten Tag die beste Antwort auf die Strategie Verweigern des Schülers gespielt. Das zeigt sich auch daran, dass sie sich bei dieser Strategienkombination auf ihrer Beste-Antwort-Linie befindet. Sie kann also mit ihrer Wahl zufrieden sein. Der Schüler hingegen befindet sich nicht auf seiner Beste-Antwort-Linie. Für ihn wäre es besser gewesen, die HÜ zu machen, wenn er nur gewusst hätte, dass er kontrolliert wird.

Die Lehrerin wird also bei der Strategie Kontrollieren und damit auf ihrer Beste-Antwort-Linie bleiben, während der Schüler ein paar Mal hintereinander die HÜ machen wird, um mit seiner relativen Häufigkeit näher zu seiner Beste-Antwort-Linie zu gelangen. Die Dynamik zielt also in Richtung des rechten unteren Eckpunktes des Einheitsquadrates. Es ändert sich so lange nichts am Verhalten der beiden Spieler, bis man eine Beste-Antwort-Linie schneidet. Das passiert in unserem Fall, wenn der Schüler so häufig hintereinander die HÜ gemacht hat, dass seine relative Häufigkeit q des Verweigerns unter $\frac{1}{5}$ gefallen ist. Dann ist nämlich die beste Antwort der Lehrerin auf diesen Zustand nicht mehr Kontrollieren. Die Dynamik zielt dann in Richtung der linken unteren Ecke, usw. Nach einigen Wiederholungen erkennt man, dass der Prozess zum Nash-Gleichgewicht konvergiert. Das lässt sich übrigens auch formal beweisen.

Man hat damit eine Rechtfertigung, das Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien tatsächlich als Lösung dieses Spiels anzusehen. Zum einen treffen dabei natürlich wechselseitig beste Antworten aufeinander, wie wir das auch bei Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien gefordert haben. Zum anderen stellt sich dieses Nash-Gleichgewicht auf Dauer ganz von selbst ein. Ein Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien ist also keineswegs als Verhaltensempfehlung für ein einmaliges Spiel zu verstehen. Wie auch? Was sollte ein Spieler mit dem Vorschlag anfangen, eine Strategie mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit zu spielen?

Eine andere Sichtweise

Wir müssen allerdings gemischte Strategien nicht unbedingt als relative Häufigkeiten im wiederholten Spiel auffassen. Sie können genau so gut als relative Anteile in großen Bevölkerungen gesehen werden. Bleiben wir beim HÜ-Spiel und betrachten wir jetzt insgesamt N Schüler. Es können also maximal N Hausübungen an einem Tag gemacht und maximal N Kontrollen von der Lehrerin durchgeführt werden.

Nun wird an einem bestimmten Tag eine gewisse Anzahl an Hausübungen gemacht und eine gewisse Anzahl an Kontrollen durchgeführt. Ist dabei der relative Anteil der Kontrollen z. B. größer als $\frac{5}{7}$, so ist es für die Schüler günstig, darauf mit der besten Antwort HÜ machen zu reagieren. Am Folgetag werden also alle Schüler, die die HÜ gemacht haben, bei ihrer Strategie bleiben. Sie spielen ja schon die beste Antwort auf die derzeitige Situation. Zusätzlich werden sich einige jener Schüler, die die HÜ verweigert haben, dazu entscheiden, die HÜ diesmal zu machen. Wir nehmen der Einfachheit halber an, dass ein gewisser Prozentsatz a der HÜ-Verweigerer an diesem Tag zu HÜ-Machern wird. Analoges (ebenfalls mit Prozentsatz a) soll auch für die Anzahl der Kontrollen gelten, deren Entwicklung davon abhängt, wie groß die Anzahl der gemachten

Hausübungen gerade ist. Mit dieser Art der Modellierung findet also ein Anpassungsprozess statt, der im Gegensatz zum ersten Modell nur auf den Zustand im vorhergehenden Spiel reagiert, anstatt die gesamte Vergangenheit des Prozesses zu berücksichtigen.

Es zeigt sich, dass in diesem Modell die relativen Häufigkeiten des Verweigerns bzw. des Kontrollierens nur dann zum Nash-Gleichgewicht konvergieren, wenn $\lim_{t \to \infty} a = 0$ gilt, wenn also die Anpassungsbereitschaft mit der Zeit abnimmt und beliebig klein wird. In diesem Fall lässt sich das Nash-Gleichgewicht als relativer Anteil in einer großen Bevölkerung interpretieren, der sich ebenfalls auf Dauer von selbst einstellt.

Didaktische Bemerkungen

Interpretieren: Die zentrale Botschaft dieses Artikels beschäftigt sich gerade mit der Frage, wie Nash-Gleichgewichte in gemischten Strategien zu interpretieren sind. Diese Frage darf auch in der Arbeit mit Schülern nicht zu kurz kommen. Spieltheorie soll und kann nicht darauf reduziert werden, lediglich das Nash-Gleichgewicht formal zu berechnen. Spätestens wenn man Spiele mit mehreren Nash-Gleichgewichten (z. B. das in der Literatur häufig behandelte Spiel „Battle of the Sexes“) untersucht, stellt sich die Frage, welches nun tatsächlich auf lange Sicht gespielt wird.

Vernetztes Denken: Viele reale Prozesse lassen sich nicht mit einfachen Ursache-Wirkungs-Prinzipien verstehen. Es ist gerade bei gesellschafts- oder umweltpolitischen Themen notwendig, systemisches Denken – eine Größe wird von vielen anderen beeinflusst und beeinflusst auch umgekehrt die anderen Größen – an den Tag zu legen.

Iteratives Denken: Auch das „Denken in Schritten“ wird durch die Behandlung spieltheoretischer Dynamiken geschult.

Beste-Antwort-Grafik: Das didaktische Potenzial dieser Darstellungsform liegt unter anderem darin, dass beinahe der gesamte Informationsgehalt eines Spiels auf einen Blick erfasst werden kann. Sie ist außerdem der Schlüssel zur Interpretation gemischter Strategien, sobald man die Entwicklung der relativen Häufigkeiten in dieser Grafik abbildet. Nicht zuletzt bietet sie einen Einblick in die Struktur eines Spiels und ermöglicht so eine recht einfache Klassifikation aller 2×2-Spiele in Normalform.

Literatur

Hofbauer, J., K. Sigmund (1998): Evolutionary Games and Population Dynamics. Cambrigde University Press.

Sieg, G. (2005): Spieltheorie. Oldenburg Wissenschaftsverlag, München.