

Das Nash-Gleichgewicht – ein zentrales Lösungskonzept der Spieltheorie

1. Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien

Ob Koalitionsabkommen von Regierungen halten, ob Fördermengen- oder Preisabsprachen gebrochen werden – viele Situationen aus Alltag, Wirtschaft oder Politik lassen sich spieltheoretisch modellieren. Kommt es gelegen, verwenden auch Medien zur Verstärkung ihrer eigenen Prognosen gerne solche Modelle, die oft direkt zum spieltheoretischen Klassiker „Gefangenendilemma“ führen. Werfen wir daher den Blick zunächst auf dieses wohl populärste Beispiel der Spieltheorie, in seinem klassischen Gewand. Zwei Gefangene werden eines gemeinsamen Verbrechens beschuldigt. Es ist ihnen nicht lückenlos nachzuweisen, allerdings liegen Indizien vor. Die beiden Gefangenen sollen nun getrennt voneinander verhört werden, dazu wird ihnen folgender Handel vorgeschlagen: Schweigen beide Gefangene, so erhalten sie wegen nachweisbarer geringfügigerer Delikte jeweils 2 Jahre Haft. Gesteht nur einer der beiden, während der andere schweigt, bekommt er keine Haftstrafe. Derjenige, der schweigt, bekommt 5 Jahre Haft. Gestehen beide Gefangene, erhält jeder eine Haftstrafe von 4 Jahren. Jeder Gefangene muss alleine, völlig unabhängig vom anderen, entscheiden, wie er nun aussagt. Die übliche Darstellung solcher Spiele erfolgt mit einer Bimatrix (Abb. 1). Die Strategie *Gestehen* ist für beide Gefangene die jeweils

		Gefangener 2	
		gestehen	schweigen
Gef. 1	gestehen	-4	-5
	schweigen	-5	-2

besten Antworten auf beide möglichen Strategien des Gegners. Als **beste Antworten** werden jene Strategien bezeichnet, welche die höchste Auszahlung auf die jeweilige Strategie des Gegners einbringen. In der Bimatrix sind sie fett gedruckt. Damit ist auch optisch zu

Abb. 1

erfassen, dass mit der Strategienkombination (*Gestehen, Gestehen*) beste Antworten aufeinander treffen. Dieses Aufeinandertreffen von besten Antworten wird als ausgeglichener Zustand angesehen. Denn keiner der beiden Spieler kann durch einseitiges Abweichen von seiner Strategie seine Auszahlung erhöhen. Er würde sie sogar verringern, d. h. weniger Lebensjahre in Freiheit verbringen. In diesem Sinn ist die Strategienkombination (*Gestehen, Gestehen*) als Lösung des Spiels zu betrachten. Dieses Lösungskonzept, basierend auf dem Ermitteln des Aufeinandertreffens von besten Antworten und damit dem Finden des so genannten **Nash-Gleichgewichts**

geht auf J. F. Nash zurück. Es fällt natürlich auf, dass beide Gefangene mit der Strategienkombination (*Schweigen, Schweigen*) eine höhere Auszahlung erhalten hätten. Allerdings wäre dann jeder für sich mit seiner Wahl unzufrieden, denn hätte er doch *Gestehen* gewählt (während der andere schweigt), wäre er sogar ohne Haft davon gekommen. Darin besteht das „Dilemma“ der Situation, an dem eine Absprache vor dem Verhör gar nichts ändern würde. Denn im spieltheoretischen Konzept nach Nash wird immer danach getrachtet, die höchste Auszahlung aus der Sicht *eines* Spielers zu erreichen. *Gestehen* ist gerade auch wenn der andere schweigt, beste Antwort – man kommt ohne Haft davon.

Einsichten aus dem klassischen Gefangenendilemma lassen sich auf andere, realitätsnahe Situationen übertragen, die sich besonders im Sinne eines fächerübergreifenden Unterrichts zur Behandlung im Schulunterricht anbieten.

		Partei 2	
		bleibt stur	gibt nach
Partei 1	bleibt stur	-1	3
	gibt nach	-2	2

Die Analyse solcher Situationen erfordert Verbalisieren und regt zum Interpretieren und Diskutieren an, in der Folge auch zum Modellieren. Als Beispiel sei hier die Modellierung der in Österreich momentan aktuellen Frage „Hält die Regierungskoalition?“ (Abb. 2) gegeben. Das Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht in der Strategienkombination (*bleibt stur, bleibt stur*).

In der Abbildung ist es durch Fettdruck der entsprechenden Auszahlungen, die als subjektive Nutzen zu interpretieren sind, gekennzeichnet. Bekannte Beispiele wie das „Opecspiel“ oder „Wettrüsten“ schlagen in dieselbe Kerbe.

Besonders kreativ gehen Schüler/innen an Aufgabenstellungen heran, die aus ihrem direkten Lebensumfeld stammen. Das folgende „Schüler-Lehrerin-Hausübungsspiel“ eignet sich gut zur Behandlung mit sich ändernden Matrixeinträgen, die es zu interpretieren gilt.

Version I		Lehrerin	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	verweigert HÜ	-2	0
	macht HÜ	2	1

In der ersten Version des Spiels (Abb. 3) liegt eine gute Lernsituation vor. Die Auszahlungen für den Schüler sind immer für das Erstellen der Hausübung (HÜ) höher, ob die Lehrerin kontrolliert ($2 > -2$) oder nicht ($1 > 0$).

Aus Sicht der Lehrerin ist immer Kontrollieren beste Antwort und somit dominante Strategie. Damit stellt sich mit der Strategienkombination (*macht HÜ, kontrolliert*) das

Nash-Gleichgewicht ein. Wie wirken sich Änderungen in den Matrixeinträgen aus? Im Unterricht bietet sich einerseits die Möglichkeit, Matrizen mit (teilweise) geänderten Einträgen zu interpretieren und andererseits selbst durch Ändern der Einträge Situationen zu modellieren. In der Version II

Version II		Lehrerin	
		kontrolliert	kontrolliert nicht
Schüler	verweigert HÜ	-1	4
	macht HÜ	1	-1

Abb. 4

Version II (Abb. 4) des Spiels liegt eine nun nicht mehr erfreuliche Lernsituation vor. Die fett gedruckten Matrixeinträge markieren wieder die besten Antworten der Spieler auf die Strategie des Gegners. Es treffen in keinem der vier möglichen Felder beste Antworten aufeinander. Damit liegt kein Nash-Gleichgewicht in bis jetzt gewohnter Form vor, nämlich ein

Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. Mit dem Nash-Konzept lassen sich aber auch solche Situationen lösen.

2. Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien

Versetzen wir uns in die Situation des Schülers: Er wird versuchen, die Wahrscheinlichkeit, mit der die Lehrerin kontrolliert, einzuschätzen. Gehen wir also davon aus, dass die Lehrerin mit einer Wahrscheinlichkeit q kontrolliert. Welche Auszahlung hat der Schüler zu erwarten? Verweigert er die Hausübung, erhält er die Auszahlung -1 mit einer Wahrscheinlichkeit von q und die Auszahlung 4 mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 - q$, damit

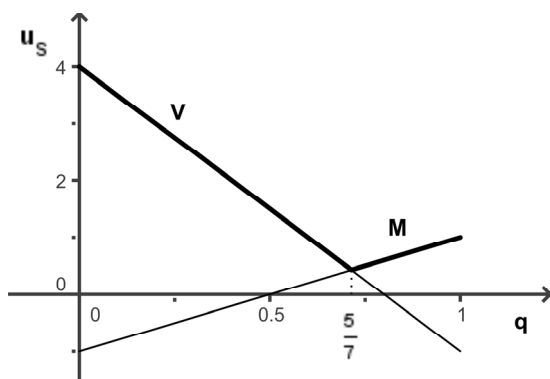


Abb. 5

insgesamt: $u_S = -5q + 4$. Macht der Schüler hingegen die Hausübung, hat er die Auszahlung $u_S = 2q - 1$ zu erwarten. Die grafische Darstellung dieser beiden linearen Funktionen visualisiert die Situation (Abb. 5): Die beiden Geraden schneiden einander bei $q = 5/7$, dort liefert jede Strategie die gleiche Auszahlung ($u_S = 3/7$). Ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Lehrerin kontrolliert, kleiner

als $5/7$, bringt das Verweigern (V) der Hausübung die größere Auszahlung und ist damit beste Antwort. Ist $q > 5/7$ bringt das Machen (M) der Hausübung die höhere Auszahlung ein. Analog analysieren wir nun aus Sicht der Lehrerin. Nehmen wir an, der Schüler verweigert die Hausübung mit einer Wahrscheinlichkeit von p . Damit hat die Lehrerin bei der Wahl der

Strategie *Kontrollieren* eine Auszahlung von $u_L = 3p + 1$ zu erwarten. Entscheidet sie sich dafür, nicht zu kontrollieren, hat sie mit $u_L = -2p + 2$ zu rechnen. Wie die Grafik (Abb. 6) zeigt, sollte die Lehrerin, falls der Schüler mit einer Wahrscheinlichkeit größer als $1/5$ die Hausübung verweigert,

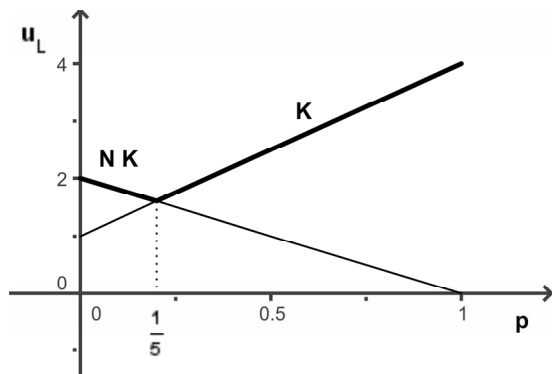


Abb. 6

kontrollieren (K). Ist die Wahrscheinlichkeit kleiner als $1/5$, sollte sie nicht kontrollieren (NK). Für den Fall $p = 1/5$ ist es egal für welche Strategie sie entscheidet ($u_L = 8/5$).

Wir fassen die Ergebnisse der Überlegungen nun in der **Grafik der Beste-Antwort-Linien** zusammen (Abb. 7): Das entstandene Bild veranschaulicht zunächst das Ergebnis unserer Suche

nach einem Nash-Gleichgewicht in reinen Strategien. In den Ecken des Einheitsquadrates, die der Kombination von reinen Strategien entsprechen, haben die Linien keinen Schnittpunkt, beste Antworten treffen nicht aufeinander. Es gibt aber einen Schnittpunkt im Inneren des Einheitsquadrates,

nämlich bei $(5/7, 1/5)$. In diesem Punkt treffen also beste Antworten aufeinander, damit liegt ein Nash-Gleichgewicht vor. Kein Spieler kann durch einseitiges Abweichen seine Auszahlung verbessern. Im Gegensatz zu Nash-Gleichgewichten in reinen Strategien, werden hier die Strategien nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit gespielt. Es handelt sich um ein **Nash-Gleichgewicht in gemischten Strategien**. Im Unterricht muss es nun daran gehen, diese Lösung zu interpretieren. Was bedeutet sie? Wohl kaum

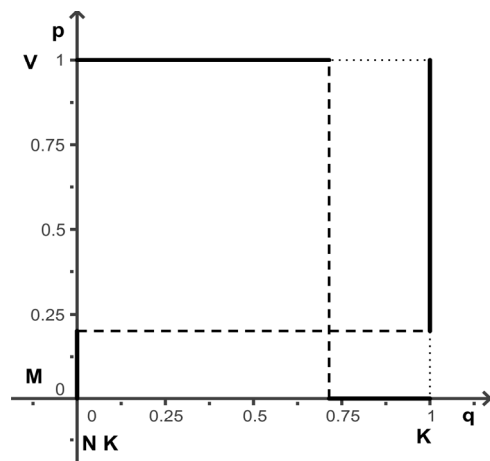


Abb. 7

eine Verhaltensempfehlung oder -erklärung für ein einzelnes Spiel. Erst im wiederholten Spiel erschließt sich der Sinn. Dazu sei auf den in direktem Zusammenhang mit diesem Beitrag stehenden Artikel von Ch. Ableitinger im vorliegenden Band verwiesen.

Literatur

Sieg G.: Spieltheorie. Oldenburg Verlag, München, 2005

Sigmund K.: Spielpläne. Hoffmann und Campe Verlag, Hamburg, 1995

Wiese H.: Entscheidungs- und Spieltheorie. Springer Verlag, Heidelberg, 2002