Stefanie ANZENHOFER, Würzburg

Musikalische Graphen können den Mathematikunterricht beleben

Den folgenden Überlegungen liegt ein fächerübergreifender Ansatz für den Mathematik- und Musikunterricht zugrunde. Dabei werden Visualisierungen – graphische Darstellungen – in beiden Bereichen wechselseitig analysiert und interpretiert. Es ist das Ziel, einerseits ein besseres Verständnis mathematischer Begriffe zu erreichen und andererseits Schülern[1] eine Hinführung zu musikalischer Improvisation zu bieten, bei der ein Ausprobieren mit Tönen mit einer klanglichen Unbefangenheit möglich ist.

Musikalische Kompositionen können zum einen anhand der allen bekannten Standardnotation mit ihren fünf Parametern (Tonhöhe, Dauer und Einsatzzeitpunkt, Besetzung bzw. Klangfarbe, Dynamik sowie Artikulation) visualisiert und mit einem gewissen Maß an Interpretation von Musikern wiedergegeben werden. Zum anderen existieren seit dem 20. Jahrhundert Formen graphischer Notationen, Kombinationen aus Elementen der Standardnotation und bildlichen Darstellungsformen. (s. Abb. 1)

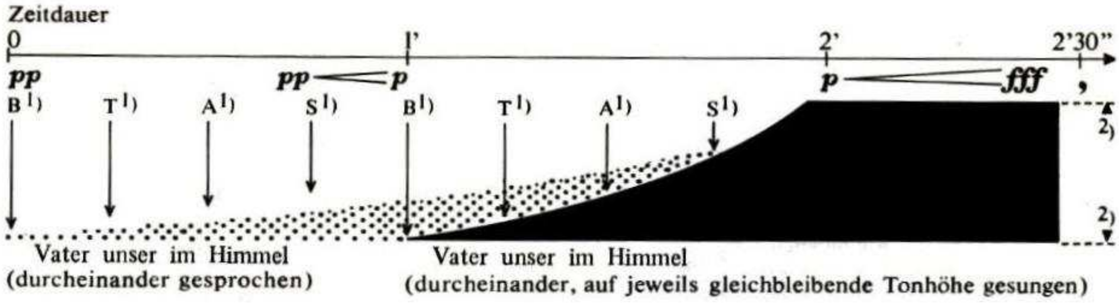

Abb. 1: Vater unser von Kurt Suttner [3]

Diese erfordert vom Musiker weitaus mehr Interpretationsfähigkeit, da die Klangwünsche des Komponisten ausschließlich bildlich angegeben und zumeist nicht alle oben erwähnten Parameter exakt festlegt werden.

Das Verständnis graphischer Darstellungen ist auch ein zentrales Element des Mathematikunterrichts und damit des Lehrens und Lernens von Mathematik. Graphische Darstellungen haben bei der Wiedergabe von Folgen, Funktionen und Relationen eine wichtige Bedeutung. Sie stellen eine Visualisierung dieser mathematischen Begriffe dar. Mit ihrer Hilfe

---

[1] In dem gesamten Text ist der Begriff *Schüler* geschlechtsneutral gebraucht, er umfasst somit auch *Schülerin.*

lassen sich Beziehungen und Abhängigkeiten klassifizieren sowie Veränderungen qualitativ und quantitativ erfassen. Es ist lange bekannt, dass Schüler Schwierigkeiten beim Erzeugen, bei der Interpretation sowie beim Lesen von Graphen haben.

Derzeit untersuche ich, wie durch das Einbeziehen „musikalischer Graphen“ das Verständnis der mit mathematischen Graphen zusammenhängenden Begriffe (Funktion, Relation, Kurve, Steigung, Krümmung,…) erweitert und dadurch insbesondere die drei Aspekte der Entwicklung eines funktionalen Denkens (vgl. [5]) unterstützt werden können.

Musikalische Graphen entstehen durch Kombination von Funktionsgraphen mit drei musikalischen Grundkompetenzen: Musik hören, Musik lesen und schreiben sowie Musik machen (vgl. [4]).

Graphen hören

Die Graphen können mithilfe von Computerprogrammen (z.B. Cinderella) durch eine Übertragung der y-Werte auf Tonhöhen zu MIDI-Klänge umgewandelt werden.

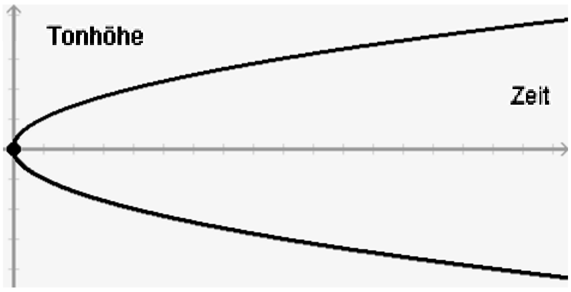

Abb. 2: Graph von $f(x) = \mp\sqrt{x}, x \geq 0$)

Das erste positive Moment beim Hören von Graphen ist die Unterscheidungsmöglichkeit von Funktions- und Relationsgraphen anhand des gleichzeitigen (Relation) oder nacheinander (Funktion) Erklingens von Tönen. Auf diese Weise erfahren Schüler, dass graphische Ähnlichkeit mit anderen Funktionsgraphen kein zwingender Grund für die Entscheidungsfindung ist. Am Beispiel der Wurzelrelation[2] $f(x) = \mp\sqrt{x}$ (mit $x \geq 0$) wird deutlich, dass ihre graphische Gleichartigkeit mit der Normalparabel, die bereits als Funktionsgraph bekannt ist, für die Klassifizierung nicht bedeutend ist. (s. Abb. 2)

Andererseits sollen Graphen von Standardfunktionen ausschließlich durch Hören wiedererkannt werden, wodurch bei Schülern eine genauere Betrachtung der Grapheneigenschaften hervorgerufen wird. Die hierfür ausschlaggebenden Charakteristika einer Sinusfunktion beispielsweise sind

---

[2] Alle dazu gehörenden Sounddateien stehen unter http://www.dmuw.de/mitarbeiter/anzenhofer

die beidseitig beschränkte Amplitude sowie das stetig wiederkehrende, symmetrisch wellenförmige Auf- und Absteigen der Tonhöhen. (vgl. [2])

Die Grapheneigenschaften können auch durch einen akustischen Vergleich verschiedener Funktionen beleuchtet werden. So können beispielsweise das Wachstum und das asymptotische Verhalten der Exponentialfunktion im Vergleich zur Funktion $y = y_c$ (Asymptote) hörend herausgearbeitet werden.

Graphen lesen und schreiben

Beim Hören eines Musikstückes sollen Schüler mithilfe von Graphen den Melodieverlauf ohne exakte Tonhöhen wiedergeben. In Abbildung 3 wurden die Takte 131 bis 138 aus dem Bolero von Maurice Ravel durch einen Studenten aufgezeichnet.[3]

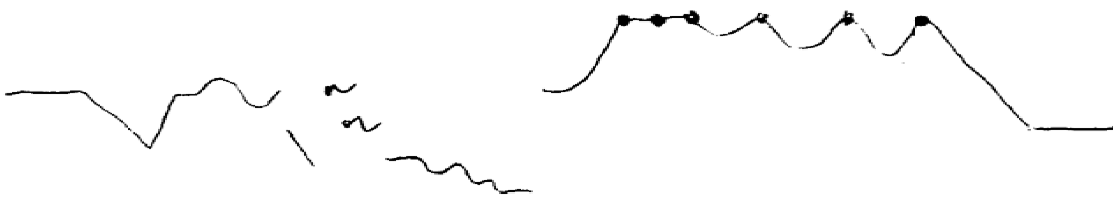

Abb. 3: Hörpartitur zu Bolero von Maurice Ravel

Auf diese Weise entwickeln Schüler eigenständig für sie bis dahin unbekannte Graphen, die sie aufgrund der Sprünge und des wellenförmigen und vielfältigen Verlaufs nicht als Funktionsgraphen eingestuft hätten.

Mit Graphen können Schüler auch exakte Notationsformen für Musik entwickeln. Wird etwa in einem Koordinatensystem eine Achse als Zeitachse und die zweite als Frequenz interpretiert, so gibt der (zweidimensionale) Graph dieses Zusammenhangs die zeitlich veränderliche Tonhöhe der Melodie an. Wird zusätzlich, als weiterer unabhängiger Parameter, die Dynamik eingeführt, so erhält man als (dreidimensionalen) Graphen eine Raumkurve. Derart können auch die anderen Parameter eingearbeitet werden. Aus einer mehrstimmigen Besetzung können ausschließlich Relationsgraphen folgen.

Beim Lesen und Schreiben von Graphen steht neben der Betrachtung der Grapheneigenschaften die Kreativität im Mittelpunkt. Die Schüler sollen durch Kombinieren bekannter Graphen für sie neue abschnittsweise definierte Funktionsgraphen gestalten und damit ihr Funktionenrepertoire erweitern.

---

[3] Linienverdickungen drücken ausschließlich Akzentuierungen aus keine Frequenz- oder Dynamikangaben.

Mit Graphen musizieren

Auch beim Musizieren mit Graphen steht die Betrachtung der Grapheneigenschaften im Vordergrund. Diese werden bei der Vertonung interpretiert und auf das akustische Moment übertragen. Die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ wird beispielsweise charakterisiert durch die Polstelle bei $x = 0$ und den asymptotischen Verlauf an den Rändern.

Eine andere Herangehensweise wird bei der Interpretation von graphischen Notationen benötigt. Das Entdecken von Figuren in den Partituren, die an Funktionsgraphen erinnern, kann bei einer musikalischen Umsetzung hilfreich sein. Für den Mathematikunterricht birgt es die Übertragungsfähigkeit mathematischer Graphen auf andere Abbildungsformen.

In jeder Aufgabe (Hören, Lesen und Schreiben von Graphen sowie Musizieren mit Graphen) werden die drei Aspekte des funktionalen Denkens (vgl. [5]) beleuchtet. Über die oben erwähnte Betrachtung der Grapheneigenschaften erlangen die Schüler eine Sicht als Ganzes. Das Änderungsverhalten wird durch die Übertragung auf Töne durch die Frequenzvariation hörbar gemacht. Auch der Zuordnungscharakter fließt einerseits über den akustischen Vergleich von Relations- und Funktionsgraphen andererseits über den funktionalen Zusammenhang von Ton und Koordinatenpunkt ein.

Die Besonderheit dieser Aufgaben liegt auf dem Moment des eigenständigen Entwickelns und Erfindens. Auf diese Weise sollen Schüler für sie neue und unbekannte Graphen entwerfen und entdecken, weswegen ein mathematisch kreativer Umgang mit Graphen zu vermuten ist. (vgl. [6])

Das Einfließen dieses Kreativitätsaspekts kombiniert mit dem auditiven Moment lässt eine Belebung des Mathematikunterrichts erwarten.

Literatur

[1] Kortenkamp, Ullrich: http://cinderella.de, 07.02.2007.

[2] Christmann, Norbert: Klänge sehen – Funktionen hören, in: LOGIN, 126/2003, S. 30-36.

[3] Frey, Max; Mettke, Bernd-Georg; Suttner, Kurt: Chor aktuell, Gustav Bosse Verlag, Regensburg 1983.

[4] Gallus, Hans Ulrich: Musikalische Fähigkeiten aufbauen, in: Jank: Musik-Didaktik, Cornelsen Verlag, Berlin 2005, S. 101-113.

[5] Vollrath, Hans-Joachim: Funktionales Denken, in: JMD, 10 (1989) 1, S. 3-37.

[6] Weth, Thomas: Kreativität im Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildesheim 1999.