Jan WÖRLER, Würzburg

Mathematik und Konkrete Kunst: Verbindungen zwischen scheinbar fremden Welten

Die „Konkrete Kunst“ hat sich im frühen 20. Jh. aus den Gattungen Suprematismus und Kubismus entwickelt. Diese Vorreiter gingen von realen Situationen, wie etwa Landschaften aus, abstrahierten sie aber so weit, dass oft nur wenige geometrische Formen oder symbolische Inhalte übrig blieben. Die Konkreten Künstler gingen einen Schritt weiter, indem sie jeglichen Bezug zur Natur aufgaben und stattdessen die Wirkung von Farben und Formen ins Zentrum ihres Schaffens stellten. Konkrete Kunst ist also nicht „abstrakt“; sie will nichts anderes darstellen, als die Mittel aus denen sie gemacht ist, als Farbe, Form und ihr Zusammenspiel.

Ein strenges Manifest legt dabei fest, was erlaubt ist und was nicht: Die Werke müssen klar, nachprüfbar und universell sein. Dafür ist es notwendig, sie vorzukonstruieren, d. h. einen festen „Bauplan“ zu entwickeln.

Nahezu zwingend führen die Postulate auf die Sprache der Mathematik, aus der sich, etwa nach den Regeln der Kombinatorik, des Zufalls oder spezieller Zahlenfolgen, die Konstruktionsschemata ergeben. Mathematik ist also das zentrale Hilfsmittel beim Entwickeln Konkreter Kunst.

Andererseits ergibt sich aus der Forderung der „Nachprüfbarkeit“ für den Betrachter, dass er die mathematischen Konstruktionsprinzipien in den Werken nachvollziehen und nacherleben kann – ein Aspekt, der die Konkrete Kunst für den Mathematikunterricht besonders interessant macht.

Ulamspirale und Primzahlenbild

Am „Primzahlenbild 1-9216“ (1996) der Schweizer Künstlerin Suzanne Daetwyler kann man den Bauplan zunächst nur mit einiger Mühe erkennen; scheinbar zufällig sind die farbigen Kästchen auf einem grauen Hintergrund verteilt (Abb. 1). Wie der Titel verrät, sind aber Primzahlen die bildbestimmenden Elemente. Da die Zahlen 2 und 3 die einzigen primen sind, die direkt aufeinander folgen, wird der Blick ins Zentrum des Bildes gelenkt: nur dort stoßen mehrere Kästchen lückenlos aneinander. Das Kästchen in

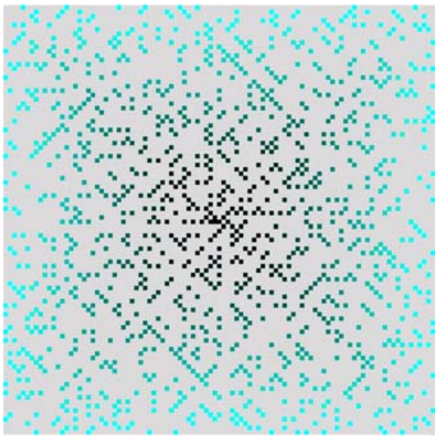

Abb. 1: ‚Primzahlenbild 1-9216’

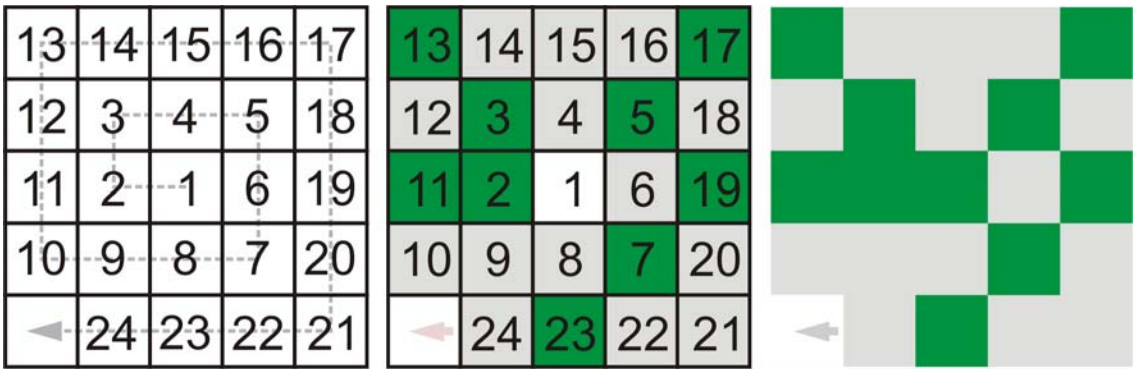

Abb. 2: Die natürlichen Zahlen werden spiralförmig angeordnet (li.), dann werden die Primzahlen markiert (mi.); die Zahl 1 wird von der Künstlerin als Primzahl behandelt.. So entsteht das Zentrum des Primzahlbildes (re.).

der Mitte des Bildes wird mit der Zahl 1 identifiziert. Von dort aus werden spiralförmig rechtsdrehend alle Kästchen durchnummeriert und die, die eine prime Nummer tragen, farblich hervorgehoben (Abb. 2).

In der Mathematik ist diese Konstruktion schon Jahre vorher aufgetaucht: der polnische Mathematiker Stansislaw M. Ulam hatte sie 1963 zufällig entdeckt und daran zusammen mit M. L. Stein und M. B. Wells die Verteilung von Primzahlen untersucht. Ihr Interesse galt der Tatsache, dass die Primzahlkästchen bei einer solchen Anordnung mehr oder weniger lange Diagonalen ergeben können. Solche Diagonalen lassen sich durch quadratische Funktionen ausdrücken und man hatte gehofft, Formeln zu finden, die ausschließlich Primzahlen erzeugen. Die Suche blieb aber erfolglos.

Das Experimentieren mit diesen sog. „Ulamspiralen“ wird interessant, wenn man im Zentrum des Bildes nicht mit der Zahl 1, sondern einem beliebigen $n \in \mathbb{N}$ beginnt. So ergibt sich etwa für die Startzahl 41 eine besonders primzahlreiche Diagonale; sie wird durch den Ausdruck

$$x^2 - x + 41$$

beschrieben, der für $x = 1, 2, \ldots, 40$ stets verschiedene Primzahlen liefert.

Was zu Ulams Zeiten nur auf den leistungsfähigsten Rechnern möglich war, kann heute auf jedem PC nachvollzogen werden und ist damit insbesondere für den Unterricht verfügbar. Mit einem entsprechenden Aplett, das Primzahlspiralen dynamisch erzeugt, können Primzahlmuster erforscht und ein Eindruck davon gewonnen werden, wie dicht die Primzahlen in $\mathbb{N}$ liegen.[1]

---

[1] Applets zur Erzeugung von Ulamspiralen und weitere Informationen zum Thema „Mathematik und Konkrete Kunst“ unter *http://www.dmuw.de/projekt/kunst*

Apollonische Netze, Kreispackungen und Fraktale

Schreibt man in ein Bogendreieck einen Kreis von maximalem Radius ein, so entstehen drei neue Bogendreiecke (vgl. Abb. 4, li.), an denen das Vorgehen wiederholt werden kann. So ergeben sich iterativ Kreispackungen, die zusammen mit den Häufungspunkten als „apollonische Netze“ bezeichnet werden. Solche Netze sind, wie Benoît Mandelbrot gezeigt hat, selbstinverse Fraktale.

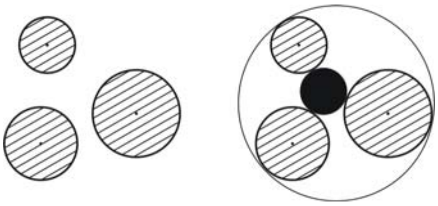

Abb. 3: Zu drei gegebenen Kreisen (li.) lässt sich ein vierter finden, der die Gegebenen von außen berührt. Ein fünfter tut dies von Außen (re.)

Dabei ist das Grundproblem, zu drei gegebenen Kreisen einen vierten zu finden, der die drei Gegebenen berührt (Abb. 3), schon alt: bereits Apollonius von Perge untersuchte im 3. Jh. v. Chr. diese Frage. René Descartes fand 1643 zumindest einen Zusammenhang, der durch das Lösen quadratischer Gleichungen auf die Radien der gesuchten Kreise führt; Sir Frederik Soddy konnte 1936 ein Analogon im 3-dimensionalen, also für Kugeln, beweisen. Erst seit 1998 ist es möglich, nach einem Satz von J. C. Lagarias, C. L. Mallows und A. R. Wilks mit Hilfe komplexer Zahlen auch die Lage der Mittelpunkte der Kreise zu berechnen.

In Einzelfällen, wie etwa bei Karl Gerstners „Farbfraktal aus der Serie: Hommage an B. Mandelbrot“ (Abb. 5, li.), können die ersten Schritte der Kreispackung auch aufgrund geometrischer Überlegungen erfolgen; man nutzt dabei Symmetrien aus. Erst ab der zweiten bis dritten Stufe wird die geometrische Konstruktion so aufwändig, dass ihr das Lösen der entsprechenden algebraischen Gleichungen vorzuziehen ist.

Der Packungsprozess lässt sich als Algorithmus aber auch auf den Rechner übertragen. Geometrischer und algebraischer Lösungsweg erzeugen dann apollonische Packungen von hoher Genauigkeit (Abb. 4 und Abb. 5, re.).

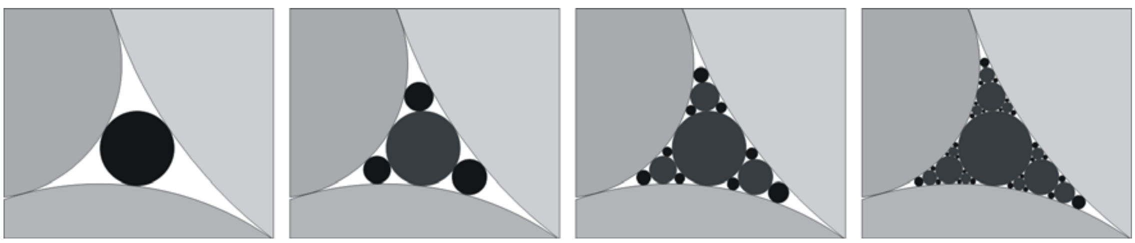

Abb. 4 (v. l. n. r.): Die ersten Schritte einer apollonischen Packung füllen ein Bogendreieck immer weiter aus

Der Künstler Karl Gerstner (*1930) zeigt sich selber von fraktalen Strukturen und ihrer Selbstähnlichkeit begeistert. Mandelbrots bekanntes Buch „Die fraktale Geometrie der Natur“ war der Auslöser für ihn, Fraktale in einer ganzen Reihe Konkreter Kunstwerke zu thematisieren. Dabei scheut der Künstler auch nicht vor dem Computereinsatz zurück und erschafft so Werke, die in ihrer technischen Perfektion einerseits, in ihrer mathematischen Komplexität andererseits begeistern.

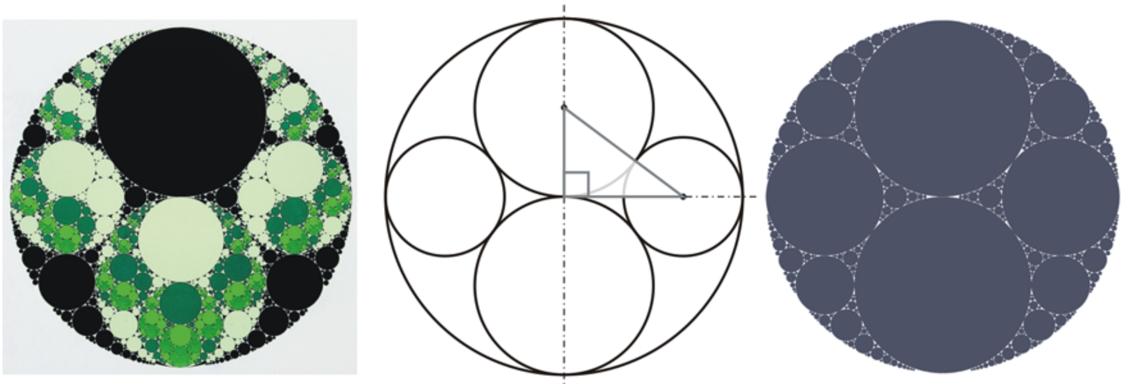

Abb. 5: Gerstners „Farbfraktal […]“ (li.) lässt sich anfangs geometrisch konstruieren (Pythagoras; mi.), aber nur über apollonische Netze vollständig beschreiben (re.).

Konkrete Kunst im MU – ein Ausblick

Bei näherer Betrachtung steckt Konkrete Kunst voller mathematischer Geschichte(n) und Problemfelder. Im Unterricht können mit ihrer Hilfe daher sehr verschiedene Themen (Symmetrien, Primzahlen, Folgen, quadratische Gleichungen, Kreisgeometrie, Algorithmen, Packungsprozesse, Zufall, Fraktale, …) in – im Wortsinn – ‚anschaulicher’ Weise beleuchtet werden. Häufig ist der Einstieg in die Werke einfach, und erst die weitere Analyse wirft tiefere mathematische Fragen auf. Konkrete Kunst bietet sich daher insbesondere für offene Aufgabenstellungen mit starker Binnendifferenzierung an.

Die Kunst kann aber auch zu einer umfassenderen Sichtweise dessen verhelfen, was Mathematik – unabhängig vom üblichen Anwendungsbezug – ausmacht: ihre Ästhetik. Mathematik und Kunst können schön sein, erstaunen, verwundern, begeistern.

Literatur

GUDERIAN, D.: *Mathematik in der Kunst der letzten 30 Jahre.* Ebringen i. Br. : Bannstein Verlag, 1990.

LAUTER, M. (Hrsg.) ; WEIGAND, H.-G. (Hrsg.): *Ausgerechnet … Mathematik und Konkrete Kunst.* Baunach : Spurbuchverlag, 2007