Hans-Stefan Siller, Universität Salzburg

Über die Bedeutung der grafischen Repräsentation beim Funktionalen Modellieren

1. Modellieren von und mit Funktionen – ein notwendiges Konzept eines modernen Mathematikunterrichts

Der Begriff „Funktion“ ist ein sehr häufig gebrauchter Begriff, auch außerhalb der Mathematik, wie man an häufig anzufindenden Formulierungen – z.B. „Das Gerät funktioniert wieder!“ – feststellen kann. Was man tatsächlich unter einer Funktion versteht hängt jedoch im Einzelnen von der (mathematischen) Bildung einer Person ab. So ist es auch nicht verwunderlich, dass man in der Literatur unterschiedlichste Schreib- und Sprechweisen zum Funktionsbegriff findet. Für Schüler/Innen sind diese Notationsweisen oft sehr verwirrend, da sie sich im Laufe ihrer Schulzeit an eine einzige Notation gewöhnt haben. Übliche Formen zur Darstellung einer Funktion lauten wie folgt:

- die Funktion $f: U \rightarrow V$, um den Abbildungscharakter darzustellen,
- $y = f(x)$, um den Wirkungscharakter darzustellen,
- x # f(x), um den Abhängigkeitscharakter darzustellen.

Aber auch die Folgenden Darstellungen einer Funktion sind üblich:

- Eine Parabel in 2. Hauptlage als quadratische Funktion, $y = 2px^2$,
- die Geschwindigkeit ist eine Funktion der Zeit, $v = v(t)$.

Natürlich könnte man, durch eine mathematisch exakte Definition, viele der gebräuchlichen Notationsformen als unzulässig erklären, jedoch würde das zu unnötigen Diskussionen führen, da es immer auf die Sichtweise des Betrachters ankommt. Hischer[1] schreibt dazu: „Ich könnte nun diese Verwirrung sofort aus der Welt schaffen, indem ich eine mir sympathische Definition wähle, etwa eine Funktion als rechtseindeutige Relation definiere, und damit einige der o.g. Sprechweisen als unzulässig erkläre. Im Sinne der Informatik würde eine „Funktion“ etwa auch als „Objekt“ aufgefasst werden!“

Durch entsprechende Recherche in der gegenwärtigen Fachliteratur wird man feststellen, dass es keine einheitliche Definition der Funktion gibt. Aber gerade dadurch zeigt sich die enorme Spannweite dieses Begriffes sowohl in der Fachwissenschaft als auch in der Fachdidaktik.

Betrachtet man den Funktionsbegriff aus didaktischer Sicht, ist es wichtig

[1] Hischer, H.: Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Preprint No. 54, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002

Aspekte zu finden, die den Funktionsbegriff ausreichend charakterisieren. Vollrath hat dies in seinem Artikel „Funktionales Denken“[2] vorgenommen. Die wesentlichen Punkte sind:

- Methodologischer Aspekt
    - Abhängigkeit einer Größe
    - Idee der systemisch-dynamischen Variation
- Phänomenologischer Aspekt
- Quantitativer Aspekt
- Input-Output Aspekt

Ein weiterer, leider oft übersehener Aspekt bei der didaktischen Betrachtung von Funktionen, ist der Algorithmische Aspekt[3]. Außerdem muss man bei der didaktischen Betrachtung den Aspekt der Modellierung/Modellbildung berücksichtigen, denn Modellbilden ist unweigerlich mit dem Auffinden von Funktionen und funktionalen Abhängigkeiten verbunden[4,5]. Mit Hilfe der zentralen Idee der Funktionalen Modellierung ist es möglich, Funktionen genauer zu beschreiben. Ausführlich ist dies in „Basics in Functional Modeling“[6] dargestellt. Dabei beschreitet man einen zweigeteilten Weg:

- Black-Box-Beschreibung
  Zunächst wird das Problem in Teilprobleme aufgegliedert und jedes dieser Teilprobleme für sich behandelt. Danach wird die Kommunikation unter diesen Teilmoduln beschrieben. Durch diese Behandlung erhält man die Teilprobleme als Funktionen.

- White-Box-Beschreibung
  In dieser Phase wird die innere Struktur der Komponenten dargestellt und untersucht. Man sieht die inneren Abläufe und erkennt bzw. versteht die zugrundeliegenden mathematischen Strukturen.

---

[2] Vollrath, H. J.: Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik, S. 3 – 37, 1989

[3] Fuchs, K.J.: Projektion – EDV-Nutzung – Zwei fundamentale Ideen und deren Bedeutung für den Geometrisch-Zeichnen Unterricht, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg, 1988

[4] Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg 2006

[5] Siller, H.-St.: Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit M@thDesktop, Diplomarbeit, Universität Graz, Graz, 2002

[6] Fuchs, K.J.; Siller, H.-St.; Vásárhelyi, E.: Basics in Functional Modeling, CASIO Europe GmbH, Budapest, 2008

Mit Hilfe eines CAS oder Hand-Held-Rechners ist es möglich die funktionalen Modelle leicht und einfach zu übertragen und auch Berechnungen durchzuführen. Durch eine entsprechend gewählte grafische Darstellung des modellierten Sachverhalts kann ein tiefgehendes Verständnis der funktionalen Modellierung erreicht werden. So kann der oben beschriebene 2-Phasen-Weg der Funktionalen Modellierung auch von Schüler/Innen erreicht werden, so dass die fundamentale Idee der Funktion entsprechend der mathematischen Grundbildung vermittelt wird.

2. Grafische Darstellungen von Funktionen

Um funktionale Abhängigkeiten grafisch darzustellen, existieren vielfältige Möglichkeiten. Die gebräuchlichste Darstellungsweise ist die Darstellung mittels Pfeildiagrammen. Mit Hilfe dieser Darstellung ist es möglich die prinzipielle Wirkungsweise von Funktionen zu zeigen, jedoch kann man die Wirkungsweise einer Funktion, manchmal auch den Abhängigkeitscharakter, nicht allzu deutlich erkennen. Darum wähle ich die Darstellung von Funktionen mittels PROGRAPH[7]-Diagrammen. Mit Hilfe dieser Darstellung ist es möglich Schüler/Innen die Wirkungsweise von Funktionen „intuitiv" zu erklären. V.a., wenn es sich um Schüler/Innen handelt, die im Umgang mit Funktionen bereits vertraut sind, ist dies eine sehr effektive Weise funktionale Abhängigkeiten grafisch darzustellen, ähnlich wie bei imperativischen Überlegungen mit Nassi-Shneiderman-Diagrammen[8].

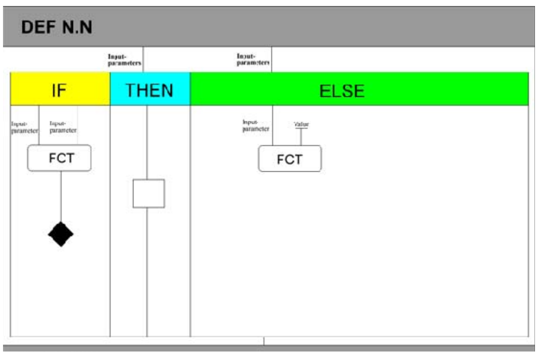


Abbildung 1

Der Aufbau eines solchen PROGRAPH-Diagramms (Abb. 1) ist strukturiert und einfach. Mittels einiger weniger Symbole kann ein funktionales Modell einfach und übersichtlich dargestellt werden. Eine weitere Stärke dieses Diagramm-Typs liegt in der Darstellung von rekursiven Funktionen als „Bild in Bild-Struktur".

3. Beispiel

Betrachten wir folgendes Beispiel:

---

[7] Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report. In: Computer Languages, 10:2, pp. 91 - 125., 1985

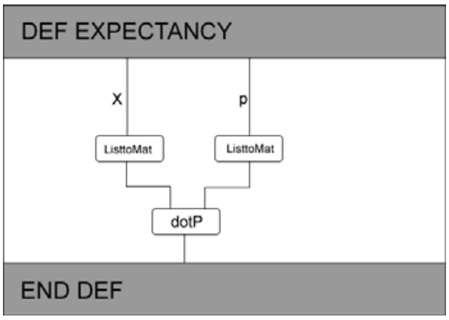
[8] I. Nassi and B. Shneidermann, "Flowchart techniques for structured programming", ACM SIGPLAN Notices, vol. 8, pp. 12-26, Aug. 1973

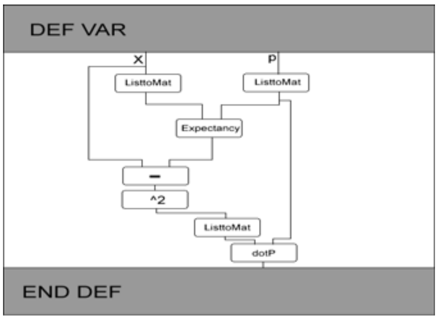
Gegeben sei eine Verteilung für eine Zufallsvariable X mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p_i = P(X=X_i)$:

X	1	2	3	4	5	6
$p=P(X=X_i)$	0.12	0.23	0.01	0.42	0.34	0.2

a. Erstellen Sie eine grafische funktionale Darstellung für den Erwartungswert und die Varianz.
b. Berechnen Sie mittels einer am Rechner definierten Funktion die beiden Werte.

Die grafische Umsetzung sieht für die Aufgabenstellung a) wie folgt aus:





Die Funktion die man auf dem Rechner (in unserem Fall CASIO Classpad 300+) dafür definieren kann, sieht folgendermaßen aus:
Define Exp(X,p) = dotP(ListtoMat(X),ListtoMat(p))
Define Var(X,p) = dotP(ListtoMat((X- dotP(ListtoMat(X),ListtoMat(p)))²,
ListtoMat(p))

Literatur

Fuchs, K.J.; Siller, H.-St.; Vásárhelyi, E.: Basics in Functional Modeling, CASIO Europe GmbH, Budapest, 2008
Fuchs, K.J.: Projektion – EDV-Nutzung – Zwei fundamentale Ideen und deren Bedeutung für den Geometrisch-Zeichnen Unterricht, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg, 1988
Hischer, H.: Zur Geschichte des Funktionsbegriffs, Preprint No. 54, Universität des Saarlandes, Saarbrücken, 2002
Nassi, I;Shneidermann, B.: "Flowchart techniques for structured programming", ACM SIGPLAN Notices, vol. 8, S. 12-26, Aug., 1973
Siller, H.-St.: Modellbilden – eine zentrale Leitidee der Mathematik, Dissertation, Universität Salzburg, Salzburg 2006
Siller, H.-St.: Auf Mathematica basierende Lerneinheiten zur fundamentalen Idee der Modellbildung, illustriert an Extremwertbeispielen und Beispielen der Integralrechnung mit M@thDesktop, Diplomarbeit, Universität Graz, Graz, 2002
Matwin, S.; Pietrzykowski, T.: The Programming Language PROGRAPH: A Preliminary Report. In: Computer Languages, 10:2, pp. 91 - 125., 1985
Vollrath, H. J.: Funktionales Denken. In: Journal für Mathematikdidaktik, S. 3 – 37, 1989