Christoph WASSNER, Nürnberg & Stefan KRAUSS, Kassel

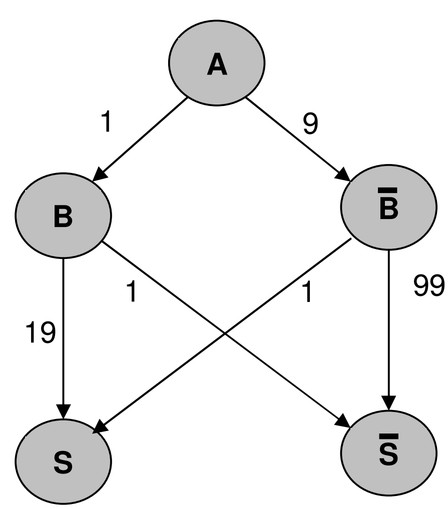
Natürliche Häufigkeiten – Rückschau und Ausblicke zu einem gewinnbringenden didaktischen Konzept

1. Häufigkeitsmodellierung mit dem „Wahrscheinlichkeitsabakus“

Ein Pionier auf dem Gebiet der Didaktik der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, ARTHUR ENGEL, schrieb bereits 1973 im Vorwort seines bekannten Werkes: „Wahrscheinlichkeit und Statistik sind heute ein unentbehrliches Rüstzeug für alle Natur- und Geisteswissenschaften geworden. […] Die Integration der Wahrscheinlichkeit und Statistik in den Unterricht **aller** Stufen wird den Mathematikstoff entscheidend bereichern, d.h. interessanter und nützlicher machen.“ (Engel, 1973, S.5). Mit dieser Vision sollte Herr Engel Recht behalten. Jedoch dauerte es leider nochmal ca. 30 Jahre, bis die Integration in dieser Weise in allen Ländern verbindlich umgesetzt wurde (im Rahmen der KMK-Bildungsstandards).
Eine Idee, die er aber leider nicht explizit für die Didaktik ausbaute, ist der Wahrscheinlichkeitsabakus (Engel, 1975). Mit diesem Algorithmus ist es möglich, jeden diskreten stochastischen Prozess als einen „random walk on a graph“ zu beschreiben. Das ist didaktisch umso bedeutsamer, da es sich auf dem Niveau der Sekundarstufe I praktisch ausschließlich um diskrete stochastische Prozesse handelt. Wir übertragen diese Idee auf eine typische Anwendungssituation bei mehrstufigen Zufallsversuchen:

> Rauchsensoren eines bestimmten Typs bieten einen einigermaßen zuverlässigen Schutz, indem sie bei Ausbrechen eines Brandes Alarm melden. In durchschnittlich 5 % aller Brandfälle zeigt die Anlage keinen Alarm. Die Wahrscheinlichkeit eines Fehlalarms beträgt 1% pro Tag. In der Fabrikationshalle liegt das tägliche Brandrisiko bei 10%. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in der Halle brennt, wenn die Sirene heult.

Dieser Graph veranschaulicht die Situation im Engelschen Sinne. Die Knoten heißen hier „Zustände“. Vom Anfangszustand A kann man die zwei Zustände B (für „Brand“) und $\overline{B}$ erreichen. Von diesen aus führen jeweils wieder Pfade zu den Zuständen S (für „Sirene heult“) und $\overline{S}$. Von A aus werden nun Spielchips in beliebiger Zahl durch den Graphen „gepumpt“. In jeder Verzweigung gibt es ein „Verhältnis“, das die mögliche Bewegung der Spielchips durch den Graphen bestimmt. Ist etwa in der ersten Verzweigung das

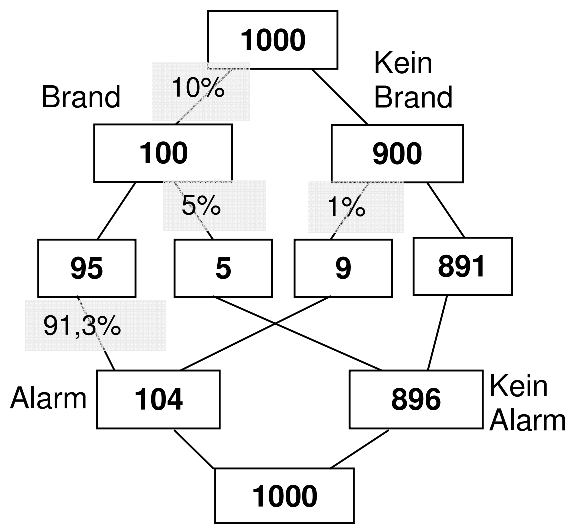


Verhältnis 1 : 9, dann können nur jeweils 10 Chips gleichzeitig von A nach B (1) bzw. $\overline{B}$(9) wandern. Befinden sich in A nicht Vielfache von 10 Chips, so müssen sie in A bleiben.

Das Ende dieses „Spiels“ wird erst dann erreicht, wenn sich alle Chips in den „Endzuständen“ S oder $\overline{S}$ befinden. Für den Übergang in diese „zweite Stufe“ benötigt man gemäß dem Verhältnis von B aus Vielfache von 20 (19+1) Chips, von $\overline{B}$ aus Vielfache von 100 (1+99) Chips. Da von A nach $\overline{B}$ immer je 9 Chips gleichzeitig wandern, müssen sich also erst 900 Chips in $\overline{B}$ ansammeln, ehe sie sich gemäß dem Verhältnis 1 : 99 auf die Endzustände S (9) bzw. $\overline{S}$ (891) verteilen können. In B haben sich dann aber bereits 100 Chips angesammelt, die sich gemäß dem Verhältnis 19:1 auf S (95) bzw. $\overline{S}$ (5) verteilen.

2. Vom „Abakus“ zum Häufigkeitsbaum

Wenn wir uns nun vorstellen, dass in jedem Zustand ein Zähler angebracht wäre, der die durchlaufenden Chips gezählt hat, ergeben sich genau die Häufigkeiten, die wir in unseren bisherigen Arbeiten als *natürliche Häufigkeiten* bezeichnet haben. In einem Baumdiagramm, das auch die umgekehrte Richtung beinhaltet, kann man den „Endzustand“ nach 1000 Chips so darstellen.



Ergebnisse dieses „idealisierten“ Experiments (oder einer entsprechenden Simulation) sind Erwartungswerte, d.h. die Werte, die sich in einem entsprechenden realen Zufallsexperiment am wahrscheinlichsten ergeben würden. Der Einwand ist berechtigt, dass wir bei (statistisch) relativ kleinen Zahlen von z.B. 1000 bei einem realen Experiment auch deutliche Abweichungen von den „Idealwerten“ zu erwarten hätten. Aber – und das ist ja gerade der besondere Wert des Abakus bzw. der natürlichen Häufigkeiten als *Heuristik* – man tut so, als ob das Ergebnis des „idealisierten“ Experiments das Ergebnis eines realen Experiments wäre und erhält somit die bestmögliche Prognose für den Ausgang (vgl. Wassner, Biehler & Martignon, 2007). Man kann mit diesem „Trick“ in der Lehr-Lernsituation viel erreichen:

1. Wahrscheinlichkeiten (also die bestmöglichen Prognosen) können ohne vorherige Herleitung wahrscheinlichkeitstheoretischer Regeln einfach mittels Proportionen ermittelt werden.

2. Selbst ohne irgendeinen Begriff von Wahrscheinlichkeit (z.B. in der Primarstufe bzw. frühen Sekundarstufe) kann eine derartige Prognose-situation bereits verständig modelliert werden.

3. Auch wenn man derlei Situationen auf höherem Niveau behandeln will (d.h. mit den formalen Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung), schafft eine entsprechende Veranschaulichung die nötige Klarheit und ermöglicht eine Überprüfbarkeit der Regeln.

4. Schließlich kann das Wesen des Zufalls, also das Abweichen der realen Daten von den „Modellwerten", nur über Häufigkeitsbetrachtungen wirklich untersucht und erkannt werden.

3. Vom „idealisierten" Experiment zum „realistischen" Experiment

Weitgehend unveröffentlicht, machte Arthur Engel auch konkrete Vorschläge zur Verwendung seines Abakus (oder besser Graphenspiels) im Stochastikunterricht. Neben der Bestimmung von Erwartungswerten könnten demnach Spielchips durchlaufende Graphen auch für Realexperimente eingesetzet werden, wenn man in jeder Verzweigung sozusagen ein entsprechendes Zufallsgerät „einbaut". Zu Zeiten von Herrn Engel gab es keine Computer oder Taschenrechner, die Zufallszahlen erzeugen konnten. Heutzutage gibt es Simulationsmöglichkeiten mit entsprechender Computersoftware.[1] Das Resultat eines entsprechenden Realexperiments oder einer Simulation wird mehr oder weniger genau die erwarteten Werte liefern. Eine wesentliche Erfahrung, die in der Schule relativ früh vermittelt werden soll, ist, dass man bessere Prognosen bei größeren Anzahlen machen kann. Diese zentrale Idee wird aber viel zu schnell wieder fallen gelassen, weil nach Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes Situationen meist nur noch idealisiert modelliert werden. Das idealisierte und realistische „Simulieren" mit Häufigkeitsbäumen wäre eine gewinnbringende Möglichkeit, mehr Verständnis für den Zusammenhang von Modell und Zufall zu schaffen. Eigene erste Unterrichtserfahrungen bestätigen diese Idee.

[1] Umsetzung z.B. in der Trainingssoftware zu Sedlmeier & Köhlers (2001); Weitere Umsetzungen in gängiger Software sind von den Autoren dieses Artikels bei Anfrage erhältlich.

4. „Natürliche Häufigkeiten“ in der Literatur

Über viele Jahre hinweg wurde Engels Idee des idealisierten Experiments mit Graphen, die natürliche Häufigkeiten „erzeugen“, in der didaktischen Literatur nicht mehr beachtet. Die Ehre gebührt − und das sollte an dieser Stelle auch nochmal ins Gedächtnis gerufen werden − Psychologen wie Gerd Gigerenzer, die aus kognitiver Sicht v.a. an der Frage der Verkomplizierung von Urteilen unter Unsicherheit durch Repräsentationen mit normierten Wahrscheinlichkeitswerten arbeiteten. Die durchschlagenden Erfolge ihrer Testpersonen, wenn mit natürlichen Häufigkeiten modelliert wurde, wiesen auf das Potential als didaktische Idee hin (Gigerenzer & Hoffrage, 1995). In der Didaktik wurde sie dann in einem Projekt (am MPI Berlin und Universität Kassel)[2] für den Unterricht aufbereitet und getestet. Lerngewinne wurden in vielfältiger Weise empirisch belegt. Weiterhin wurde deutlich, dass durch die hierarchische Struktur der Baumdiagramme das Prozesshafte von Zufallssituationen am leichtesten gedanklich nachzuvollziehen ist (Wassner, Krauss & Martignon, 2002; Wassner, 2004).

In neuerer Zeit wird das Konzept „natürliche Häufigkeiten“ und entsprechende Veranschaulichungen in der oben beschriebenen Form in didaktischen Veröffentlichungen aufgegriffen. Hier einige Beispiele: Kernlehrplan Mathematik NRW (2004), Lehrbuch Büchter & Henn (2007, S. 223f.), in Fachzeitschriften (z.B. Pinkernell, 2006) und in didaktischer Software (VU-Statistik, 2005). Bisher kaum zu finden ist die Verwendung in Schulbüchern. Im Rahmen unserer Unterrichtsstudien erstelltes Material könnte als Anregung hierfür dienen. (Wassner et al., 2004)

[2] DFG-gefördert von 2001-2003, Projektleiter: L.Martignon, R.Biehler, P.Sedlmeier

Literatur

Büchter, A. & Henn, H.W. (2007). Elementare Stochastik, 2.Aufl. Heidelberg: Springer.

Engel, A. (1973). Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Stuttgart: Klett Verlag.

Engel, A. (1975). The Probabilistic Abacus. Educational Studies in Mathematics Vol.6/1, 1-22.

Gigerenzer, G. & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: Frequency formats. Psychological Review 102, 684-704.

NRW (2004). Mathematik Kernlehrplan Gymnasium Sek. I. Frechen: Ritterbach.

Pinkernell, G. (2006). Test positiv – Diagnose negativ. Mathematik lehren 138, S.50-55

VU-Statistik (2005). S II, Mathematik interaktiv, auf CD-ROM. Braunschweig: Schroedel

Wassner, C., Krauss, S. & Martignon, L. (2002). Muss der Satz von Bayes schwer verständlich sein? Praxis der Mathematik 44 (1), 12-16.

Wassner, C. (2004). Förderung Bayesianischen Denkens – kognitionspsychologische Grundlagen und didaktische Analysen. Hildesheim: Franzbecker.

Wassner, C., Biehler, R., Schweynoch, S. & Martignon, L. (2004). Authentisches Bewerten und Urteilen unter Unsicherheit – Arbeitsmaterialien für den Stochastikunterricht. Online: https://kobra.bibliothek.uni-kassel.de/ > Suchbegriff: Kadisto

Wassner, C., Biehler, R. & Martignon, L. (2007). Das Konzept der natürlichen Häufigkeiten im Stochastikunterricht. Der Mathematikunterricht, 53 (3). S.33-44.