Manfred BOROVCNIK, Klagenfurt

Gesetze des Zufalls

Auf dem ersten Blick scheinen Gesetz und Zufall nicht vereinbar. Die Eigenheiten von Gesetzen des Zufalls sind entsprechend schwer zu verstehen. Einige Simulationsexperimente können hier zur Orientierung helfen. EXCEL wird benutzt, um Ideen von probabilistischen Gesetzen einzuführen.

1. Gesetze für den Zufall?

Die Deutung von Wahrscheinlichkeit als relativer Häufigkeit in einer längeren Versuchsserie ist wesentlich nicht nur für die Anwendung sondern für das Verständnis des Begriffs. Die Gesetze der Großen Zahlen haben eine eigenartige Konvergenz der relativen Häufigkeiten gegen die zugrunde liegende (unbekannte) Wahrscheinlichkeit zum Inhalt. Es gibt viele Anlässe, diese indirekten Gesetze falsch zu verstehen.

In den Naturwissenschaften geht es – zumindest in klassischer Auffassung – um die Klärung von Ursache-Wirkungs-Zusammenhängen: Welche Versuchsbedingungen bewirken was. Werden diese in einem Experiment eingehalten, erlauben Gesetze die Vorhersage der Folgen. Entsprechend „einfach“ ist es, ein naturwissenschaftliches „Gesetz“ als falsch zu erkennen. Störgrößen und Messfehler erschweren allerdings eine Überprüfung.

Außerhalb der Naturwissenschaften ist das Einhalten der Versuchsbedingungen schwieriger. Beim Münzwurf etwa könnte man im Sinne der Physik ein Gerät bauen, das dann bei bestimmter Einstellung immer Kopf wirft. Statt die Störfaktoren auszuschalten versucht man aber, sie „auszugleichen“. Also: Möglichst die Lage der Münze in der Hand nicht beobachten, hoch genug werfen etc. Der „Rest“ trägt dann stochastische Züge, man spricht von der Wahrscheinlichkeit einer Münze, auf Kopf zu fallen. Welchen Gesetzen dieses „Experiment“ nun folgt, ist zu klären. Vorab sehen wir ein: Wenn man über Gesetze des Zufalls spricht, so sind das nicht Gesetze im klassisch-naturwissenschaftlichen Sinne.

Für den allwissenden Laplaceschen Dämon gibt es keinen Zufall. In der wissenschaftstheoretischen Diskussion wird das als naiver Determinismus abgetan. Es ergeben sich auch aus der Sicht von Ethik und Religion unangenehme Konflikte mit dem freien Willen. Diesen Schwierigkeiten entgeht man, indem man den Zufall einfach als eine Denkweise interpretiert, die zu nützlichen Einschätzungen und Vorhersagen führt, egal ob es einen „inneren“ Zusammenhang gibt oder wie ein solcher aussehen könnte. Man orientiert sich dann nur an den äußeren Erscheinungen, an erkennbaren statistischen Regelmäßigkeiten oder Gesetzen.

Den Zufall mathematisch zu beschreiben greift zu kurz. Nicht nur, weil vielen Menschen dies nicht zugänglich ist sondern wegen der inhärenten Verzerrung. Gleicherweise „gefährlich“ ist es, den Zufall und seine Gesetze durch die praktischen Auswirkungen zu illustrieren, wie man das mittels Simulation versucht. Der Zufall wird dabei in der Wirklichkeit nachgestellt. Die Ergebnisse erhalten einen szenario-artigen Charakter. Sie zeigen auf, wie sich Ergebnisse bei ‘Wirken‘ des reinen (fiktiven) Zufalls einstellen, wie sich Systeme entwickeln. Allerdings macht der Zufall alles möglich, er spielt die verrücktesten Dinge aus. Nach Murphy tritt alles ein, was auch nur irgendwie möglich ist. Nach endlichen vielen Schritten mag ein „Gesetz“ noch nicht sichtbar sein. Daher bemüht man sich üblicherweise, lange Serien zu erzeugen, um sich dieser „Störeffekte“ zu entledigen. Dann aber sieht man den Zufall nicht mehr am Werke.

Auf die relative Häufigkeit eines Ereignisses bezogen, heißt das, man hat zwar eine genaue Schätzung der unbekannten Wahrscheinlichkeit nach 10000 Simulationen des Einzelversuchs, aber über die Eigenheit des Zufalls lernt man daraus nichts. Was macht der Zufall? Wie stark variiert er? Welches Risiko hat man, nach einer kürzeren Serie (der Normalfall!), wenn man Ergebnisse verallgemeinern möchte.

2. Das Unterrichtsexperiment

Die Analysen stützen sich auf eine Unterrichtssequenz mit Jugendlichen im Alter von 14 Jahren. Aus logistischen Gründen mit 5 farbigen Würfeln in einem Würfelbecher durchgeführt. Gerade Zahl wurde als Zahl, ungerade als Kopf eines Münzwurfs protokolliert (Fig. 1). Nach n=600 Versuchen mit 290 Köpfen ergab sich eine Schätzung für die unbekannte Wahrscheinlichkeit von 0,483. Die Stabilisierung der relativen Häufigkeiten nach der Zeit (entspricht der Länge der Serie) zeigt man üblicherweise in einem Schaubild (Fig. 2).

Nr.	Wert	Code	Klasse	Anzahl	Messung Ws. Kopf
1	g	0			
2	g	0			
3	u	1	g	310	
4	g	0	u	290	0,483
5	u	1		0	
6	u	1	gesamt	600	
7	g	0			
8	u	1			Zufall
9	g	0			0,522
10	u	1			
11	g	0			
12	g	0			
13	u	1			
14	u	1			
15	g	0			
16	g	0			
17	u	1			
18	g	0			
19	g	0			
20	u	1			
598	g	0			
599	g	0			
600	u	1			

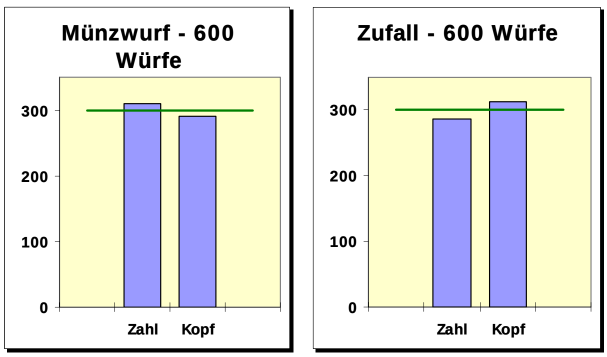

Fig. 1: Protokoll des Münzwerfens – Daneben ein späteres Simulationsergebnis

Die „letzten“ 200 Punkte in Fig. 2 variieren um weniger als 0,5%-Punkte. Das verleitet zu einer falschen Einschätzung der erreichten Präzision. *Aber*: ein neues Experiment würde +/- 4%-Punkte um p schwanken.

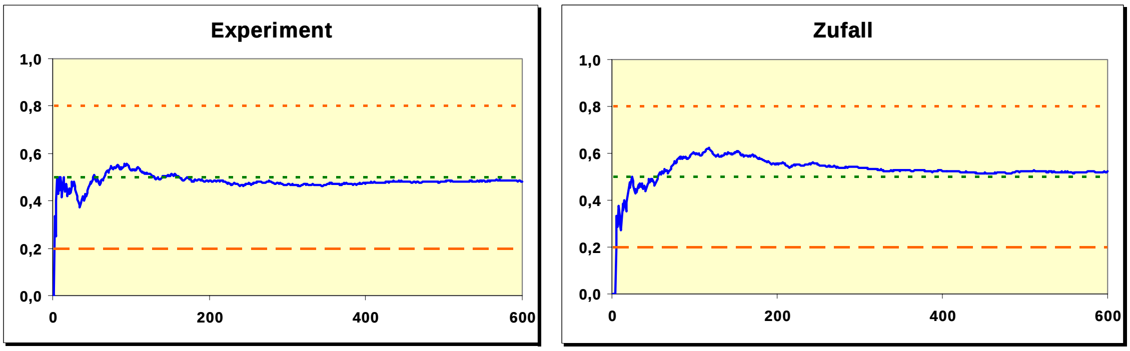

Fig. 2: Entwicklung der relativen Häufigkeit – Experiment und weitere Simulation

3. „Freudenthals Weg“ zum Gesetz der Großen Zahlen

Das Experiment mit 5 Würfeln in einem Becher legt nahe, das Schwanken der Becherergebnisse zu studieren: Wie viele haben den Wert 3 (oder einen der Werte von 0 bis 5). Stellt man die aktuellen Becherergebnisse der Entwicklung der relativen Häufigkeiten gegenüber, so erhält man einen Blick auf ein eigentümliches Verhalten des Zufalls: Der Stabilisierung auf lange Sicht steht der volle, ungebremste Zufall der aktuellen Becherergebnisse gegenüber. Hier ist eine Analogie zum Messen hilfreich. Wir tun so, als ob die Wahrscheinlichkeit p eine physikalische Größe darstellt (fiktiv bekannt). Gemessen wird durch folgendes Verfahren:

Man bestimme die relative Häufigkeit von ‚Kopf‘ in der jeweiligen 5er-Serie. In Fig. 3 zeigt sich die Wiederholstreuung der Messwerte, welche mit wenigen Ausnahmen zwischen 0,2 und 0,8 schwanken. Insgesamt streuen die Messwerte augenfällig, um eine Achse, die etwa bei ½ liegt. Das Messverfahren scheint richtig kalibriert.

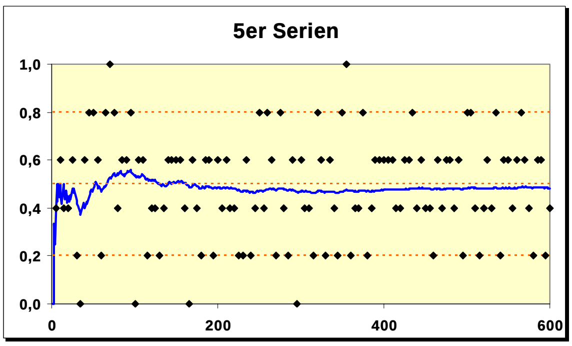

Fig. 3: Stabile Entwicklung der Häufigkeiten trotz vollen Schwankens der aktuellen Serien

In der Messtechnik kennt man den Begriff der Präzision von Messinstrumenten. Messungen der Wahrscheinlichkeit mit Fünfer-Serien führen zu Schwankungen der Messwerte zwischen 0,2 und 0,8. Das bedeutet, die Messfehler schwanken bis +/- 0,3. Das ist viel zu ungenau! Hilft ein „anderes Messverfahren“, etwa mit 20 Daten? Aus demselben Protokoll fasst man zwei benachbarte Serien zusammen und erhält Serien der Länge 10, schließlich bei einem weiteren Zusammenfassen Serien der Länge 20.

Der Effekt ist deutlich in Fig. 4 zu sehen. Nun liegen alle Werte, mit einer Ausnahme, innerhalb der Schwellenwerte 0,2 und 0,8; die Fehler sind viel kleiner, die Messwerte schmiegen sich eng um eine Achse bei 0,5. Fig. 3 und 4 zeigen im Vergleich die Verbesserung der Präzision.

Es bedarf gar keiner Konvergenzaussage mit einem obskuren Grenzwert, wenn die Länge der Serie über alle Maßen erhöht wird. Der Effekt darf ohne Vorbehalte von den bestehenden Daten übertragen werden, d.h. auch bei Erhöhung von 20 auf 40 Daten in der Messserie wird man mit einer Verbesserung rechnen.

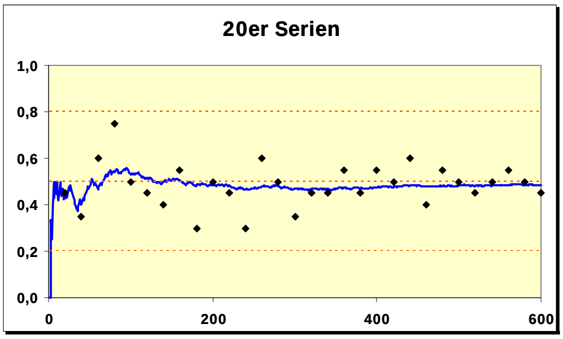

Fig. 4: Messwerte aus 20er Serien – die Achse bleibt gleich, die Mess-Werte sind viel präziser

5. Schluss

Der Zugang konzentriert sich durch die Fragen „Wie genau ist meine Messung, die auf 5 (bzw. 10 oder 20) Würfen basiert?“ auf die *Verteilung* der Messwerte; insbesondere gibt die Varianz Auskunft über die erreichte Präzision der Messung der unbekannten Wahrscheinlichkeit. Die Behandlung des Gesetzes der großen Zahlen unter Vermeidung des angesprochenen obskuren Grenzwerts der relativen Häufigkeiten ist schon in Freudenthal (1972) zu finden, wurde aber außer in Borovcnik (1992) nicht wirklich aufgegriffen. Zur Eigenheit von Wahrscheinlichkeit findet man mehr in Borovcnik und Peard (1996). Über intuitive Schwierigkeiten, die auch mit einer falschen Auffassung des Gesetzes der Großen Zahlen zusammenhängen, orientiert man sich u. a. in Borovcnik und Bentz (1991).

Literatur

Borovcnik, M.: *Stochastik im Wechselspiel von Intuitionen und Mathematik*. Mannheim: BI 1992.

Borovcnik, M., Bentz, H.-J.: Empirical research in understanding probability. In: Kapadia, R., Borovcnik, M.: *Chance encounters*. Dordrecht: Kluwer 1991, 73-106.

Borovcnik, M., Neuwirth, E.: *Ein rekursiver Zugang zur Binomialverteilung*. http://www.osg.or.at/ (2006)

Borovcnik, M., Peird, R.: Probability. In: Bishop, A., e. a. : *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer 1996, 239-288.

Fischbein, E.: *Intuitions in science and mathematics. An educational approach.* Dordrecht: D. Reidel 1987.

Freudenthal, H.: ‚The empirical law of large numbers’ or ‘The stability of frequencies’. In: *Educational Studies in Mathematics* 4(1972), 484-490.