Christoph ABLEITINGER und Stefan GÖTZ, Wien

Konkurrenzgrenzen: kann man sie verstehen?

Die Ausgangssituation ist offen: Ein Konsumgut kann von zwei Anbietern A und B bezogen werden. Von welchen Orten aus ist der eine günstiger als der andere? – Konkurrenzgrenzen sind die Orte gleicher Kosten. Das hier präsentierte mathematische Modell kann auf sehr unterschiedlichen Ebenen und Niveaus im Schulunterricht bearbeitet werden: Die Gesamtkosten setzen sich aus den jeweiligen Anschaffungskosten *A* und *B* und den Transportkosten *a* und *b* pro km zusammen. Für letztere legen wir die direkte Entfernung (Luftlinie) in der Ebene, also den Euklid´schen Abstand zugrunde.

Der einfachste Fall

ist der gleicher Anschaffungs- und Transportkosten: $A = B$ und $a = b$. Klarerweise ist die Konkurrenzgrenze dann die Streckensymmetrale zwischen den Orten A und B.

Der zweite Fall

geht von gleichen Anschaffungskosten und unterschiedlichen Transportkosten aus: $A = B$ und $a \neq b$. Mit Abbildung 1 ergibt sich:

$$A + b\sqrt{(x+l)^2 + y^2} = A + a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}.$$

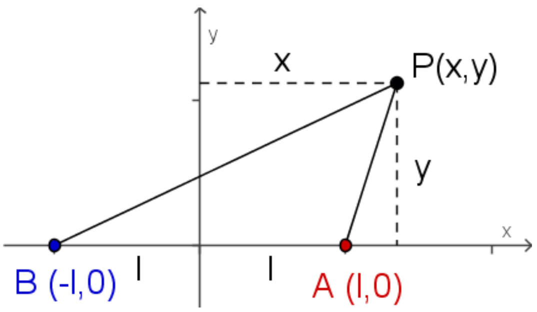

Abb. 1

Mit Hilfe eines CAS oder auch per Hand finden wir

$$\Big(x - \underbrace{l\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}_{x_M}\Big)^2 + y^2 = \underbrace{l^2\left(\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\right)^2 - l^2}_{r^2},$$

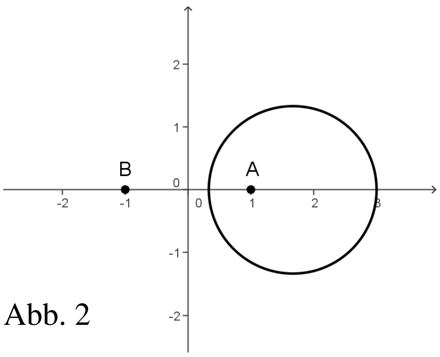

Abb. 2

die Konkurrenzgrenze stellt also einen Kreis mit Mittelpunkt $(x_M\ ,0)$ und Radius *r* dar. Für *a* = 80 und *b* = 40 ergibt sich beispielsweise Abbildung 2. Man sieht an obiger Gleichung: $x_M{}^2 - r^2 = l^2$, das ist eine gleichseitige Hyperbel: Abbildung 3.

Der Grenzübergang $b \to a$ zeigt $x_M \to \infty$ und $r \to x_M$, ein zweiter für $b \to 0$ bringt $x_M \to l$ und $r \to 0$.

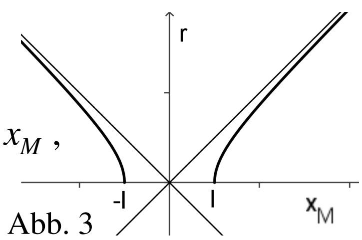

Abb. 3

Fassen wir die Wurzelausdrücke in der ersten Gleichung als Abstände vom Punkt P zu den Produktionsstandorten A und B auf, so erkennen wir wegen $\frac{\overline{PB}}{\overline{PA}} = \frac{a}{b} = \text{const},$ dass die Konkurrenzgrenze aus der Menge aller Punkte besteht, deren Abstandsquotient von zwei festen Punkten konstant ist. Diese Punkte liegen auf dem Apolloniuskreis: Abbildung 4. Das Verhältnis a:b allein bestimmt also die Konkurrenzgrenze, was man auch aus

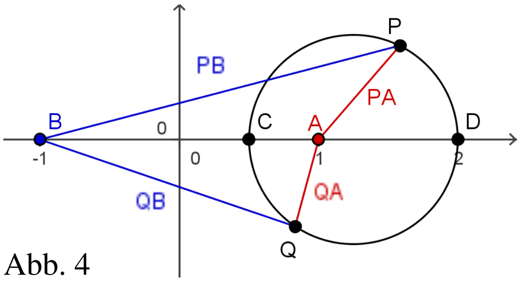

Abb. 4

$$x_M = l\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 1}{\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 1} \quad \text{und} \quad r = r(x_M)$$

sieht: Abbildung 5. Bei annähernd gleichen Transportkosten werden die Kreise sehr groß, bei gleichen Transportkosten erhalten wir wieder den einfachsten Fall. Wird ein Standort im Vergleich zum anderen unverhältnismäßig teurer, ziehen sich die Kreise um den teuren Standort zusammen.

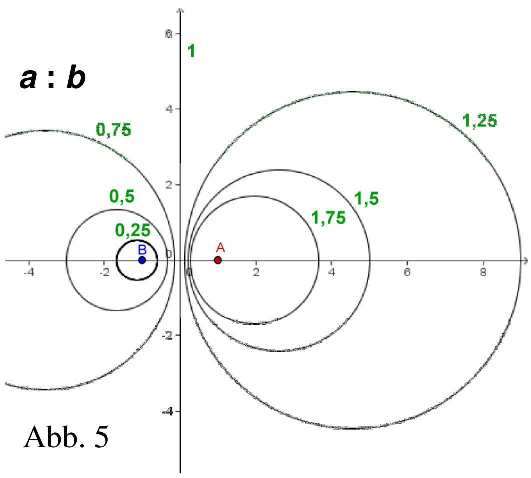

Abb. 5

Der dritte Fall

ist jener gleicher Transport- und unterschiedlicher Anschaffungskosten.

Aus $B + a\sqrt{(x+l)^2 + y^2} = A + a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ erhalten wir mittels CAS oder per Hand: $\frac{4a^2l^2 - (B-A)^2}{(B-A)^2}x^2 - y^2 = \frac{4a^2l^2 - (B-A)^2}{4a^2}$. Für $4a^2l^2 - (B-A)^2 > 0$, was gleichbedeutend ist mit $2al > |B-A|$, ergibt sich eine Hyperbel. Ist $4a^2l^2 - (B-A)^2 = 0$, also $2al = |B-A|$, erhalten wir die x-Achse, während bei $4a^2l^2 - (B-A)^2 < 0$, also $2al < |B-A|$, eine Ellipsengleichung vorliegt. Die Form der Konkurrenzgrenze ist also allein von $|B-A|$ im Vergleich zu a abhängig.

Schon aus der Gleichung $A - B = a\sqrt{(x+l)^2 + y^2} - a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ erkennt man, dass für $A > B$ $x > 0$ und für $A < B$ $x < 0$ folgt. Es kommen also nur einzelne Hyperbeläste, Strahlen und „halbe" Ellipsen als Konkurrenzgrenze in Frage. (Der Fall $A = B$ ist bereits erledigt.) Wir bestimmen die Nullstellen der Konkurrenzgrenzen, um Klarheit zu erlangen, was tatsächlich der Fall ist: aus

$A - B = a\sqrt{(x+l)^2 + y^2} - a\sqrt{(x-l)^2 + y^2}$ folgt $\frac{A-B}{a} = \sqrt{(x_N + l)^2} - \sqrt{(x_N - l)^2}$ und schließlich $\frac{A-B}{a} = |x_N + l| - |x_N - l|$. Eine Fallunterscheidung bringt

- erstens für $x_N \geq l > 0$ die Beziehung $\frac{A-B}{a} = 2l$;
- zweitens bekommen wir für $-l < x_N < l$ das Ergebnis $\frac{A-B}{a} = 2x_N$;
- drittens bleibt schließlich $x_N \leq -l < 0$, was $\frac{A-B}{a} = -2l$ liefert.

Der erste und dritte Fall führt uns also auf die *x*-Achse, für den Fall $x_N \geq l > 0$: $2al = A - B > 0 \Leftrightarrow A > B$ ist die Konkurrenzgrenze ein Strahl auf der *x*-Achse rechts vom teureren Standort A: Abbildung 6. Das Resultat ist einfach zu interpretieren: Die Transportkostendifferenz kompensiert gerade die Anschaffungskostendifferenz, wenn man sich auf der Konkurrenzgrenze befindet. Befindet man sich irgendwo anders in der Ebene, geht sich das nicht mehr aus: Abbildung 7 zeigt mit Hilfe der Dreiecksungleichung, dass $|\overline{PB} - \overline{PA}| \leq 2l$ ist. Das heißt von überall anders ist B der günstigere Anbieter, in diesem Fall gilt echte Ungleichheit.

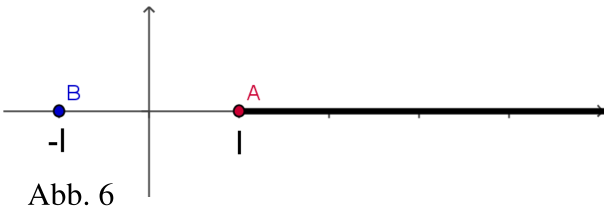

Abb. 6

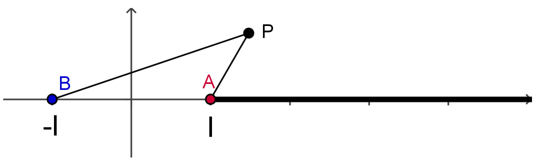

Abb. 7

Es bleibt noch der Fall $-l < x_N < l$, der $A - B = 2ax_N$ und $|A - B| < 2al$ mit sich bringt. Damit gelangen wir zur Hyperbel, die algebraisch erhaltene Ellipse ist also keine mögliche Konkurrenzgrenze. Der Scheitel liegt bei $x_N = \frac{A-B}{2a}$. Wenn also $A < B$ ist, dann ist der linke Hyperbelast die Konkurrenzgrenze, für $A > B$ der rechte: Abbildung 8 für $A = 5{,}4$ und $B = 3{,}7$.

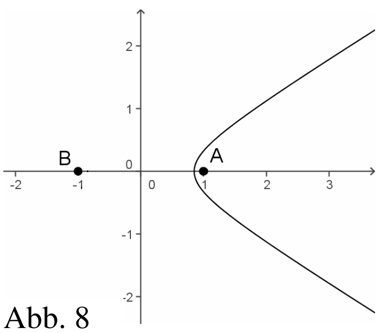

Abb. 8

Wenn wir die Hyperbel algebraisch analysieren, so zeigt uns die Gleichung $\frac{x^2}{\frac{(B-A)^2}{4a^2}} - \frac{y^2}{\frac{4a^2l^2-(B-A)^2}{4a^2}} = 1$, dass die lineare Exzentrizität e gleich l ist.

Die Orte A und B liegen also genau in den Brennpunkten der Hyperbel.

Geometrisch betrachtet ist der dritte Fall quasi ein Einzeiler: die ursprüngliche Beziehung $B + a\underbrace{\sqrt{(x+l)^2+y^2}}_{\overline{PB}} = A + a\underbrace{\sqrt{(x-l)^2+y^2}}_{\overline{PA}}$ zeigt, dass $\overline{PA} - \overline{PB} = \frac{B-A}{a} =$ konstant ist. Das entspricht genau der Ortsliniendefinition eines Hyperbelastes.

Einen weiteren Grenzübergang motiviert Abbildung 9: Es ist $|B-A| < 2al$ und wir betrachten $|B-A| \to 2al$.

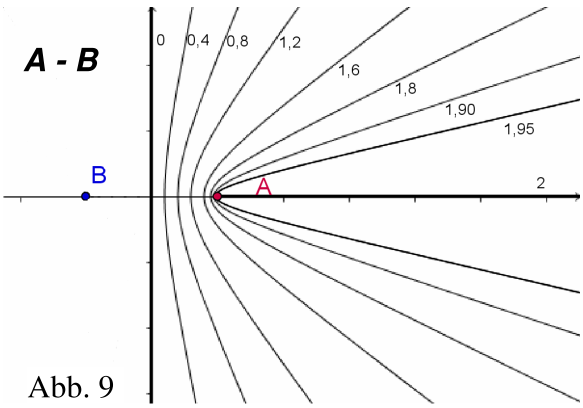

Abb. 9

Die Hyperbeläste nähern sich der x-Achse, also dem ersten bzw. dritten Fall.

Noch größere Preisunterschiede, also $|B-A| > 2al$ liefern keine Ellipse, sondern der billigere Anbieter beherrscht in diesem Fall die ganze Ebene. Die Transportkann die Anschaffungskostendifferenz in keinem Fall mehr kompensieren.

Didaktischer Kommentar

Elementare Berechnungen führen auf bekannte Kegelschnitte. Die algebraische und geometrische Behandlung ergänzen einander im Verständnis der Situation, dazu kommen noch analytische Überlegungen betreffend der gezeigten Grenzübergänge. Letztere lassen sich sowohl im zweiten wie auch im dritten Fall inhaltlich interpretieren. Fallunterscheidungen ermöglichen eine vollständige Beschreibung der Situation.

Literatur

Dirnböck, Hans (1984): Die Konkurrenzgrenze. In: Informationsblätter für Darstellende Geometrie 3(2), S. 27–30.

Jurkowitsch, Gerda (2007): Konkurrenzgrenzen mit GeoGebra. In: Materialien für einen realitätsbezogenen Mathematikunterricht, Band 11 (Schriftenreihe der ISTRON-Gruppe), S. 39–53. Franzbecker, Hildesheim.

Kontaktadresse: Fak. f. Mathematik, Universität Wien, A-1090 Wien, Nordbergstr. 15