Angelika BIKNER-AHSBAHS, Bremen

Wie konstruieren Lernende mathematisches Wissen?

Annemarie ist auf dem Gymnasium und kam in Mathematik bislang gut zurecht. Das aber ändert sich plötzlich. Sie macht sehr viele Fehler bei Aufgaben zur Längen-, Flächen- und Volumenberechnung, als sie in unsere Förderung an der Universität Bremen kommt.

Die Frage, wie groß ein Quadrat mit der Seitenlänge 1m ist, beantwortet sie mit 4m und beschreibt die Größe mit ihren Armen. Die Frage, wie groß der Flächeninhalt eines Rechtecks ist, das 6cm lang und 4cm breit ist, beantwortet sie zunächst mit 20cm, später dann mit 24cm. Nachdem wir gemeinsam sehr viele Flächen – darunter auch ein Quadrat der Seitenlänge 1m – nach ihrer Größe durch echtes und gedankliches Auslegen vergleichen und auch den Umfang mit einbeziehen, stelle ich die Frage nach der Größe des obigen Quadrats erneut. Die erste Antwort lautet nun 40dm, die zweite 100dm, obwohl die Einheiten $1m^2$ und $1dm^2$ als Flächeninhalte entsprechender Quadrate definiert worden sind. Warum kann Annemarie Flächeninhalte nicht bestimmen? In der Literatur findet man „Verwechselung von Umfang und Flächeninhalt“ als Erklärung. Das aber greift zu kurz. Ich möchte zwei unterschiedliche epistemische Handlungsmodelle verwenden, um die Situation zu analysieren.

RBC+C – ein kognitives Handlungsmodell

Dreyfus (2007) versteht unter Konstruktion von Wissen einen Prozess vertikaler Reorganisation vorhandenen Wissens in einen neuen Kontext hinein. Kerngedanke ist ein geschachteltes Modell epistemischer Handlungen: Recognizing (R) meint Handlungen des Wiedererkennens bereits vertrauter Wissensbausteine. Diese Handlungen sind eingebaut in die epistemische Handlung des Auf- und Ausbauens von Wissen (Building-with, B). Building-with ist wiederum in einen Prozess der Konstruktion neuen Wissens (Constructing, C) eingebettet. Konstruktion und Aufbauen von Wissen setzt das Wiederkennen vertrauten Wissens voraus.

Was erkennt Annemarie nun eigentlich in den Aufgaben wieder? Offenbar Längeneinheiten. Sie berechnet den Umfang des Quadrats mit der Seitenlänge 1m richtig. Auch charakterisiert sie damit in eindeutiger Weise die Größe des Quadrats, denn die Größe eines Quadrats ist durch seine Seitenlänge oder auch durch den Umfang festgelegt. 4m oder 40dm beschreibt also die Größe des „Meter-Quadrats“ korrekt im Vergleich zu anderen Quadraten. Annemarie hat außerdem gelernt, dass man kleine Quadrate an die Seitenränder des großen legt und deren Anzahl multipliziert, denn sie erhält 100 „dm-Quadrate", wie sie richtig erzählt. Warum aber gibt sie das Ergebnis in dm und nicht in dm^2 an?

In der Dimension dm^2 erkennt sie die Längendimension dm wieder (R). Hoch 2 hat für sie keine Bedeutung: Sie kann darin nichts wiedererkennen. Wenn „dm" aber die Größe des „m-Quadrats" beschreiben soll, dann geht das nur durch den Umfang. Der Prozess des Zusammenbauens (B) basierend auf den wiedererkannten Bestandteilen *Flächengröße* und *dm als Längendimension* führt folgerichtig zur Berechnung des Umfangs. Es ist nicht nötig, eine neue Einheit für die Flächengröße zu konstruieren. Also kommt es nicht zur „Construction" einer Flächeninhaltsdimension.

Als mir das auffällt, erkläre ich, dass eine Strecke nur eine Vergleichsrichtung zulässt, eine Fläche aber zwei (Auslegerichtungen) und dass deshalb die Längeneinheit $1dm^1$ die Hochzahl 1, die Flächeneinheit $1dm^2$ die Hochzahl 2 mit sich führt. Die Flächengröße eines „Meter-Quadrats" gibt Annemarie nun mit 10 000 dm^2, nämlich 10dm mal 10dm und man müsse wegen der 2 im Exponenten quadrieren. Die Hochzahl 2 in der Dimension wird nun wiedererkannt, aber als „Quadrieren" und quadrieren kann man nur eine Zahl, also quadriert sie das Ergebnis 100. Die Dimension dm^2 wird also nicht als *ein* Zeichen angesehen. An dieser Stelle korrigiere ich: „dm^2 ist ein Zeichen, dahinter verbirgt sich das Vergleichen mit Quadraten der Größe $1dm^2$". Wir vergleichen noch einmal, indem wir real und gedanklich Flächen auslegen (z.B. den Bügerpark mit „km-Quadraten"). Erst ab jetzt gelingt es Annemarie, dm^2 als ein Zeichen, nämlich die Dimension für eine Flächeneinheit, anzunehmen, als Bestimmungsmerkmal von Flächeninhalten in Aufgaben wieder zu erkennen (R) und die Flächeninhalte richtig zu ermitteln (B).

Aus dieser Analyse können wir mehrere Dinge lernen:

Es kann nur wieder erkannt werden, was bekannt ist: Jedes (Teil-)Zeichen zählt. Das, was wieder erkannt wird, ist Basis für das Aus- und Aufbauen von Wissen, auch wenn das Ergebnis nicht erwünscht, unangemessen oder falsch wird. (Wieder-)erkannt müsste nicht nur werden, *was* ein Sachverhalt (dm^2 als Flächeninhaltsdimension) *darstellt*, sondern auch *was* er *nicht darstellt* (nicht das Quadrat der entsprechenden Maßzahl). Wiedererkennen bezieht sich also auf positives und negatives Wissen.

SVSt – ein Modell kollektiver epistemischer Handlungen

Dieses Modell (Bikner-Ahsbahs 2005) beschreibt Handlungen, die in Klassen- oder Gruppengesprächen zur sozialen Konstruktion von Wissen führen. Sammeln (S) mathematischer Bedeutungen bezeichnet einen kollektiven Prozess des Sammelns gleichartiger Bedeutungen (Zeichen gleicher Objektarten). Bedeutungen, die in Gestalt von Zeichen gesammelt wurden, können dann miteinander oder mit anderen Wissensbausteinen verknüpft werden (V). Werden mathematische Einheiten durch kennzeichnende Merkmale z.B. in Beispielen erfasst, dann spricht Bikner-Ahsbahs von Struktursehen (St).

In unserem Beispiel muss man beim SVSt-Modell die gesamte soziale Situation in den Blick nehmen, die zur Bildung von Flächeninhaltseinheiten führt. Die soziale Situation stellt eine Dyade innerhalb einer Fördersituation mit mir als „Lehrerin" dar. Das Setting ist also eine Reaktion auf Lernprobleme, die behoben werden sollen. Aufgaben werden z.B. gestellt, um herauszufinden, was genau Annemarie gelingt oder nicht gelingt, um dann einen Mangel an Erfahrungen auszugleichen, das Verständnis erneut zu prüfen und wieder Erfahrungsmangel auszugleichen. Betrachten wir nun die obige Situation mit dem SVSt-Modell.

Sie beginnt damit, dass Annemarie in Überprüfungsaufgaben ihr vorhandenes Wissen sammelt (S) und Verknüpfungen (V) herstellt, die sie zuvor vermutlich auch im Mathematikunterricht („falsch") hergestellt hat. Während wir über die Größe von Quadraten sprechen, versuche ich die Bedeutung von Annemaries fehlerhaften Verknüpfungen zu verstehen. Auslegeaufgaben sollen den Mangel an Erfahrungen des Flächenvergleichs ausgleichen. In gemeinsamen (gedanklichen und realen) Prozessen des Auslegens (z.B. des Bremer Bürgerparks mit km^2-Quadraten in einem Stadtplan) hat Annemarie die Gelegenheit, mathematische Bedeutungen zum Auslegen von Flächen zu *sammeln* und zu *verknüpfen*. Nebenbei werden Beispiele für Einheitsquadrate gesammelt und in Flächeninhaltsvergleichen vielfältig verknüpft. Zu dem Zeichen dm^2 biete ich Bedeutungen (Auslegerichtungen zur Hochzahl 2, Abgrenzung zur Bedeutung „Quadrieren") an, die Annemarie interpretierend aufgreift.

Zunächst weist Annemarie der 2 überhaupt keine Bedeutung zu, sie kann „2" also nicht in einen Prozess des Sammelns mathematischer Bedeutungen aufnehmen. Ihre Sinnkonstruktionen beziehen sich nur auf Längendimensionen. Sobald die Bedeutung der 2 als Hochzahl auftritt, wird diese 2 mit dem ihr vertrauten Kontext des Quadrierens verknüpft. Aber erst als diese Verbindung ent-knüpft wird, kann die neue Flächeninhaltseinheit als Struktur gebildet und auf Volumeneinheiten übertragen werden.

Was lernen wir hieraus?

Verknüpfungen können offenbar nur mit Zeichen gelingen, die mit Bedeutungen versehen werden. Bedeutungen werden kontextbezogen hergestellt. Vertraute Verknüpfungen werden auch in neuen Kontexten hergestellt oder auf sie übertragen, selbst wenn sie falsch sind. Die Berücksichtigung aller relevanten Merkmale beim Sammeln von Bedeutungen, Ent-knüpfen falsch verknüpfter Zusammenhänge und das Zusammensetzen mehrerer Zeichen zu einer Einheit geschehen nicht von selbst.

Feine Unterschiede

Die Ergebnisse der beiden Analysen sind ähnlich. Mit dem RBC-Modell können kognitive Prozesse des Individuums analysiert werden, während das SVSt-Modell den Fokus auf das soziale Geschehen legt. Die Stärke des RBC-Modells liegt in der Frage, was Annemarie eigentlich genau wiedererkennt. Die Korrektur fehlerhafter Handlungen zu verstehen, gelingt erst durch Hinzunahme der Unterscheidung zwischen negativem und positivem Wissen.

Das SVSt-Modell erklärt nicht, es beschreibt die kollektiven epistemischen Handlungen der sozialen Situation und hilft, epistemische Prozesse zu verstehen. Gesammelt wird nur das, was wahrgenommen wird, dies kann aber in einem wechselseitigen Tun der Akteure voranschreiten. Fehlerkorrekturen werden als Ent-knüpfen und Neuverknüpfen erfasst, im RBC-Modell würde man das mit einem Wissenszuwachs beschreiben: Während Annemarie – nach dem RBC-Modell – positives *und* negatives Wissen zusammenbaut, beschreibt das SVSt-Modell diesen Sachverhalt sozial als gemeinsames Ent- und Neuverknüpfen.

Offenbar unterscheiden sich die beiden Modelle. Die Unterschiede aber sind eher fein. Deshalb muss man fragen: Braucht man überhaupt beide Modelle? Inwieweit beide Sichtweisen, die soziale Gestaltung und der individuelle Ertrag von Lernprozessen, gewinnbringend in ein Modell integriert werden können, das ist eine der Kernfragen, die in der empirischen Studie „Effective mathematical knowledge construction in interest-dense situations“[1] zusammen mit den israelischen Wissenschaftlern Tommy Dreyfus und Ivy Kidron geklärt werden sollen.

Literatur

Bikner-Ahsbahs, Angelika (2005): Mathematikinteresse zwischen Subjekt und Situation. Hildesheim: div Franzbecker.

Dreyfus, Tommy (2007): Processes of Abstraction in Context: The Nested Epistemic Actions Model. Baruch Schwarz & Tommy Dreyfus (Hrg.): Guided construction of knowledge in classrooms. An international workshop. Jerusalem: Hebrew University, 17-27.

[1] Dieses Projekt wird von der German-Israeli Foundation gefördert.