Christina Birkenhake, Department Mathematik, Universität Erlangen-Nürnberg und Berufliche Schule B7, Stadt Nürnberg

Symmetrie und Kunst im Geometrieunterricht*

Der vorliegende Bericht beschreibt ein Projekt, das an der Fachakademie für Sozialpädagogik (FAKS) in Nürnberg/Bayern im Schuljahr 2006/07 in einer 3ten Klasse durchgeführt wurde. Das Projekt stand unter dem Titel *Symmetrie in Mathematik und Kunst* und wurde in Zusammenarbeit mit dem Kunstunterricht unternommen. Die beteiligten Schülerinnen nahmen an der 5-jährigen Ausbildung zum Erzieher/in teil: zwei Jahre Sozialpädagogisches Seminar (SPS, Klassen 1 und 2), zwei Jahre Schulausbildung an der FAKS (Klassen 3 und 4) und ein Jahr Berufspraktikum. Voraussetzung für diese Ausbildung ist der mittlere Schulabschluß. Je nach zusätzlich belegten Fächern und erreichtem Notendurchschnitt besteht die Möglichkeit, die fachgebundene Fachhochschulreife, die Fachhochschulreife oder die fachgebundene Hochschulreife zu erwerben. Zu diesen zusätzlichen Fächern gehört Mathematik mit je drei Wochenstunden im 3ten und 4ten Schuljahr.

Die mathematischen Vorkenntnisse und Fähigkeiten der SchülerInnen der FAKS sind extrem inhomogen und in der Regel nicht mit denen von Schülern der Sekundarstufe II eines Gymnasiums zu vergleichen. In den zwei Jahren Mathematikunterricht muss zunächst, einem Schnellkurs gleich, der gymnasiale Stoff der Sekundarstufe I nachgeholt werden.

Kriterien zur Auswahl des Themas (vgl. [H] pp.35, 36)

(1) *Bedeutung innerhalb des Curriculums:* Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der analytischen Geometrie an und stellte so eine Vertiefung dieses Stoffes dar. Die Beziehung zur Kunst und die praktische Umsetzung der mathematischen Erkenntnisse in Kunstobjekte ließ das Projekt den im Curriculum vorgeschriebenen fachspezifischen Themen zuordnen.

(2) *Bedeutung für andere Schulfächer:* Beziehungen der Mathematik zur Kunst sollten am Beispiel von Symmetrie und Parkettierungen deutlich gemacht werden. Der Umgang mit Symmetriegruppen zeigt den Schülern, wie mathematische Inhalte für Kinder in kreativer und spielerischer Weise sinnlich erfahrbar gemacht werden können und so das Interesse am Experimentieren und Beobachten verstärkt werden kann.

(3) *Bedeutung für spätere Berufe:* u. (4) *Bedeutung für die gegenwärtige und spätere Lebenswelt der Schülerinnen:* [H] p.36 sagt, dass sich die „Bedeutung von Inhaltszielen des Geometrieunterrichts für spätere Berufe (ist) im wesentlichen auf Berufe ein(ge)schränkt, welche ein Studium der Mathematik voraussetzen, ...". Sicherlich gehört die Sozialpädagogik nicht zu diesen Berufen. Aber gerade hier sehe ich die große Notwendigkeit eines interessanten und nachhaltigen Mathematik- und insbesondere Geometrie-Unterrichts: Wie immer wieder gefordert sollte die Geometrie als Mittel zur Entfaltung spielerischer Fähigkeiten und zur Entwicklung von Freude an Mathematik dienen. Erzieher und Sozialpädagogen übernehmen heutzutage (und werden das auch in Zukunft tun) einen Großteil der Erziehung unserer Kinder: Erzieher betreuen Kinder in Horten und bei Nachmittagsbetreuungen. Da stellt sich ihnen unter anderem vermehrt die Aufgabe der Hausaufgabenbetreuung. Dieser müssen sie insbesondere auch im Fach Mathematik gewachsen sein. Wenn wir künftig mathematisch-naturwissenschaftlich interessierte Kinder und Erwachsene haben wollen, so dürfen Erzieher nicht mit Schrecken an ihren eigenen Mathematikunterricht denken, sondern müssen vielmehr Freude und Neugier auf Mathematik vermitteln. Dies ist aber nur möglich, wenn sie selber Mathematik als spannendes Kulturgut erfahren haben.
(5) *Kulturhistorische Bedeutung:* Symmetrien findet man in vielen Kunstwerken, insbesondere denen des Islam. Angehende ErzieherInnen werden in unserer multikulturellen Welt ständig mit Kindern und Jugendlichen mit Migrationshintergrund konfrontiert. So bietet das Thema Symmetriegruppen eine gute Möglichkeit, andere Kulturen besser zu verstehen, um so dieses später spielerisch im Berufsalltag umsetzen zu können. Auch im vorliegenden Fall erzeugten die Beispiele islamischer Kunst eine rege Diskussion. Muslimische Schülerinnen erläuterten die Hintergründe des Verbotes menschlicher Abbildungen in der muslimischen Kunst und versuchten so ihren Mitschülerinnen, muslimische Weltanschauungen zu erklären.

Das Projekt

Das Projekt schloß zeitlich und konzeptionell an die Behandlung der Analytischen Geometrie an. Zum besseren Verständnis der Vektoraddition wurde das xy-Koordinatensystem mit einem als unendlich gedachten Schachbrett verglichen und ein Vektor mit der Bewegung einer Spielfigur: Zum Beispiel entspricht der Vektor $\binom{1}{2}$ einer Bewegung des

Springers. Daraufhin sollten alle möglichen Positionen einer Spielfigur mit nur einer oder mehreren Bewegungsvorschriften/Vektoren markiert werden, wobei auch die inverse Bewegung berücksichtigt werden sollte. Die entstandenen Gitter im Koordinatensystem waren ein anschauliches Bild für die Gruppen $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. In diesem Zusammenhang ließ sich der Begriff des Erzeugendensystems leicht veranschaulichen: mehr als zwei Vektoren erzeugen ebenfalls nur Ketten oder Gitter und leicht lassen sich minimale Erzeuger finden. Im Folgenden wurde der Gruppenbegriff auf die Bewegungsgruppen von Band- und Flächenornamenten ausgedehnt. Anhand von zahlreichen Beispielen entdeckten die Schülerinnen die weiteren möglichen Bewegungen wie Drehungen, Spiegelungen und Gleitspiegelungen. Aus zeitlichen Gründen war es leider nicht möglich, die den Bandornamenten zugrundeliegenden 7 Symmetriegruppen von den Schülerinnen selbständig ausarbeiten zu lassen. Allerdings konnte anhand von vielen Bildbeispielen eine Liste der Symmetriegruppen verständlich erklärt werden. Die folgende Klassifikation diente der Unterscheidung der Symmetrien.

Die 7 Streifenklassen

p111, p112, p1g1, p1m1, pmm2, pm11, pmg2

Der Typ $pxyz$ eines Streifenornaments mit Längsachse G wird folgendermaßen bestimmt:

Gibt es eine Spiegelachse senkrecht zu G?	ja: $x = m$ sonst: $x = 1$
Ist G Spiegelachse? Ist G Gleitspiegelachse?	ja: $y = m$ ja: $y = g$ sonst: $y = 1$
Gibt es Drehungen mit Mittelpunkt auf G?	ja: $z = 2$ sonst: $z = 1$

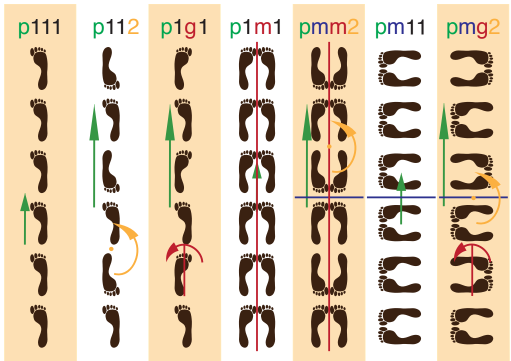

Abb.1

Zur genaueren Analyse der Flächenornamente beschränkten wir uns ebenfalls auf die Klassifikation Abb.2 (vgl. [Sch]). Der Umgang mit der Klassifikation wurde wiederum mit zahlreichen Beispielen, zumeist Mosaike aus der Alhambra, eingeübt. Des weiteren wurden die den Flächenornamenten zugrundeliegenden 5 verschiedenen Gitter untersucht, die von der Translationsuntergruppe erzeugt werden. Damit schloß sich wieder der Kreis zur analytischen Geometrie. Die Gitter

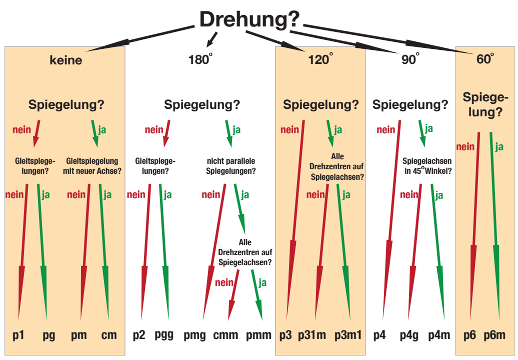

Abb.2

bieten einen guten Startpunkt zur Erzeugung eines einfachen Flächenornaments: Ein an einer Seite eines Fundamentalparallelogramm abgeschnittenes Flächenstück muss an der gegenüberliegenden Seite hinzugefügt werden. Viele schöne Ideen zu Aufgabenstellungen und Anleitungen in diesem Kontext bietet übrigens das Buch [K-M]. Da, wie ober erwähnt, nicht die ganze Klasse am Mathematikunterricht teilnimmt, wurden anhand der Beamerpräsentation [Bir] die übrigen Schülerinnen in die Klassifikation der Streifen- und Flächenornamente eingeführt. Neben den oben abgebildeten Graphiken der Klassifikationen konnten die Schülerinnen darin viele Photos von Mosaiken aus der Alhambra, der klassischen Quelle von Realisierungen der Symmetriegruppen, sehen. Abschließende Aufgabe war, selbstständig Ornamente zu fertigen. Die Wahl der Techniken, Materialien etc. stand den Schülerinnen frei. Dabei ist die Rosette Abb.3 entstanden. Die einzelnen Elemente sind jeweils mit selbst entwickelten geometrischen Flächenmustern versehen. Die Rosette hat einen Durchmesser von ca. 1,5 m.


Abb. 3

Für mehr Details zu dieser Rosette und das ganze Projekt verweise ich auf den Anhang.

Literatur

[Bir] http://christina.birkenhake.net ⇒ Vorträge und Workshops ⇒ Symmetrie - in Kunst, Natur und Mathematik ⇒ Symmetrieprojekt an der FAKS (2007)

[H] Gerhard Holland, Geometrie in der Sekundarstufe, Entdecken - Konstruieren - Deduzieren, Franzbecker (2007)

[K-M] L.C. Kinsey, T.E. Moore, Symmetrie, Shape, and Space, An Introduction to Mathematics Through Geometry, Key College Publishing (in coorperation with Springer), 2002

[Sch] D. Schattschneider, The plane Symmetrie groups: Their Recogniton and Notation, American Mathematical Monthly 85, 1978