Michael Bürker, Freiburg

Hundert Jahre Raumzeit – Grundideen der Relativitätstheorie als mathematikdidaktische Herausforderung

Hermann Minkowski hat in einem berühmten Vortrag vor genau hundert Jahren die Einheit von Raum und Zeit postuliert:
„Von Stund' an sollen Raum für sich und Zeit für sich völlig zu Schatten herabsinken und nur noch eine Art Union der beiden soll Selbständigkeit bewahren".
Einsteins spezielle Relativitätstheorie war damals gerade drei Jahre alt. Für uns stellt sich die Frage, in wie weit wir die Grundideen und die nötigen Formeln, vor allem die Lorentztransformation so weit vereinfachen und visualisieren können, dass diese von Schülern der Oberstufe ohne besondere Kenntnisse der Physik verstanden und nachvollzogen werden können. Insbesondere besteht die Frage, ob dies im Rahmen des normalen Mathematikunterrichts, mit einfachen geometrischen Vorkenntnissen und vor allem durch Visualisierung mit dynamischer Geometrie-Software möglich ist. Entsprechende Unterrichtsversuche wurden im Januar 2008 mit Oberstufen-Schülern des Freiburg-Seminars durchgeführt. In diesem Seminar werden mathematikbegeisterte Schülerinnen und Schüler von Lehrkräften betreut und spezielle, oft über die Schulmathematik hinausgehende Themen behandelt. Für das Thema „Raumzeit" standen lediglich 4 Unterrichtsstunden zur Verfügung. In der ersten der beiden Doppelstunden haben zwei Studierende, Teilnehmer meines Seminars „Computereinsatz im Mathematikunterricht", die Schüler in das Arbeiten mit „Euklid-Dynageo" eingeführt und grundlegende Aspekte affiner Abbildungen (Definitionen und einfache Sätze) behandelt. In der zweiten Doppelstunde habe ich das Thema „Weg-Zeit-Diagramm", die grundlegenden physikalischen Eigenschaften wie das Relativitätsprinzip und die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit und schließlich die Lorentztransformation „abbildungsgeometrisch übersetzt". Diese abbildungsgeometrische Übersetzung ist m. E. auch der Hauptgrund dafür, dass das an sich physikalisch ausgerichtete Thema „Raumzeit" mathematikdidaktisch zu Recht seinen Platz im fächerübergreifenden Mathematikunterricht hat. Das methodisch-didaktische Vorgehen sei im Folgenden an Hand einer Planarbeit mit 5 Arbeitsblättern skizziert.

Im ersten Arbeitsblatt sollen die Schülerinnen und Schüler die Vertauschung von Weg- und Zeitachse und die Abkehr vom orthogonalen hin zum schiefen Gitternetz, sowie die Begriffe ‚Ereignisse' und ‚Weltlinien' einüben (s. Abb. 1).

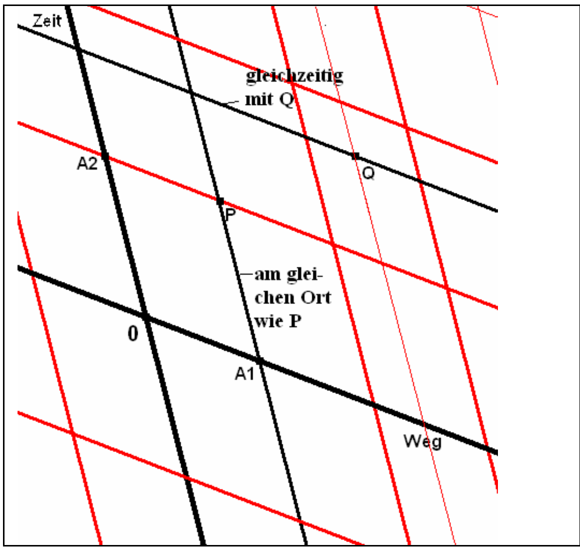


Abb.1

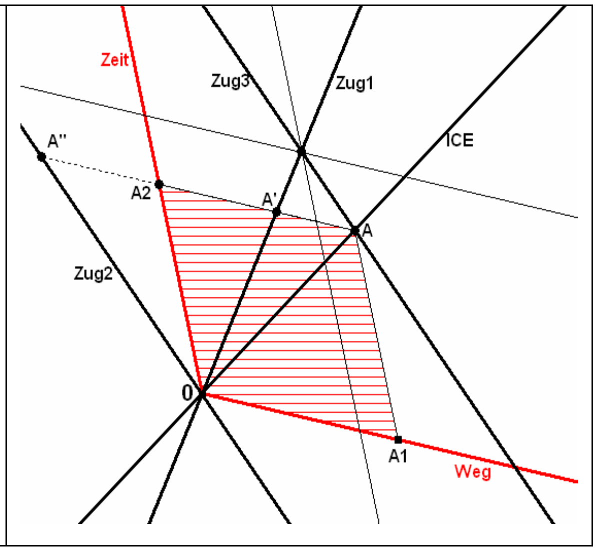


Abb. 2

Im zweiten Arbeitsblatt geht es um verschiedene Geschwindigkeiten im Weg-Zeit-Diagramm, deutlich gemacht durch vier Züge (Abb.2). Dabei sollen die Einheiten auf den Achsen so gewählt sein, dass der schnellste Zug (ICE) durch die (erste) Winkelhalbierende der beiden (schiefen) Achsen dargestellt wird. Zug1 bewegt sich mit 60%-iger ICE-Geschwindigkeit in Richtung, Zug2 mit 60%iger ICE-Geschwindigkeit in Gegenrichtung des ICE, Zug3 begegnet dem ICE im Punkt A mit gleicher Geschwindigkeit wie Zug2. Die Weltlinie des Zuges 1 geht durch O und den Punkt A', die des Zuges 2 durch O und A''. A' ergibt sich als Bildpunkt einer zentrischen Streckung des Punktes A von A_2 aus mit dem Faktor 0,6. Entsprechend ergibt sich der Punkt A'' als Bildpunkt einer zentrischen Streckung des Punktes A von A_2 mit dem Faktor -0,6, die Weltlinie des Zuges 3 als Parallele durch A zur Weltlinie des Zuges 2. Die Schüler sollen den Punkt bestimmen, in dem sich die Züge 1 und 3 begegnen. Sie sollen mittels Ziehen am Punkt A_1 das zunächst rechtwinklige Einheitsparallelogramm in ein schiefwinkliges verwandeln und dabei beobachten, dass sich die Weg-Zeit-Koordinaten des Schnittpunktes von Zug 1 und Zug 3 nicht verändern.

Im dritten Arbeitsblatt werden die zentralen Postulate der Rel.-theorie

1. *Die Lichtgeschwindigkeit ist konstant.*
2. *Sind zwei Bezugssysteme gegeneinander gleichförmig bewegt, so nehmen die Naturgesetze in beiden Systemen die gleiche Form an.*

abbildungsgeometrisch folgendermaßen „übersetzt“: Wir wählen ein ***kartesisches Koordinatensystem*** mit folgenden Eigenschaften:

3. *Die Bewegung des Lichts (Lichtlinie) wird durch die erste Winkelhalbierende dargestellt.*
4. *Weg- und Zeitachse sind in jedem der beiden Bezugssysteme A und B achsensymmetrisch bezüglich der ersten Winkelhalbierenden.*

5. Für beide Bezugssysteme gilt:
Die beiden Wegachsen (Zeitachsen) gehen durch Spiegelung an der x-Achse (y-Achse) des kart. Koordinatensystems auseinander hervor.

(5) ist rein didaktisch bedingt. In der Literatur wird in der Regel eines der beiden gleichwertigen Systeme als kartesisches, das zweite durch ein schiefes Koordinatensystem dargestellt (z. B. [1]). Nützt man die Symmetrien mit (5) geometrisch voll aus, so wird die Lorentztransformation „elementargeometrisch fassbar“: Die Einheitsrauten der beiden Bezugssysteme A und B erfüllen die Symmetriebedingungen (3) bis (5) (Abb. 3). Die Schüler sollen dabei den markierten Winkel bei S beobachten. Zieht man nämlich am Punkt A_1 unter Wahrung der genannten Symmetrien, so bleibt der markierte Winkel bei S stets ein Rechter. Warum? Dies kann mit elementargeometrischen Mitteln gezeigt werden (Abb. 4): Die beiden Dreiecke OTS und A_1MT sind ähnlich, weil sie in zwei entsprechenden Winkeln übereinstimmen. Somit sind auch die markierten Winkel bei M und S gleich weit. Da Winkel TMA_1 ein Rechter ist, ist auch Winkel OST ein Rechter. Nach dem Satz des Pythagoras ist damit $\overline{OS} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

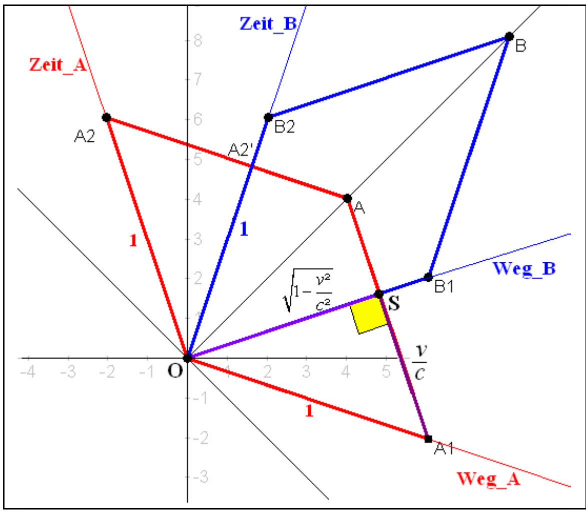


Abb. 3

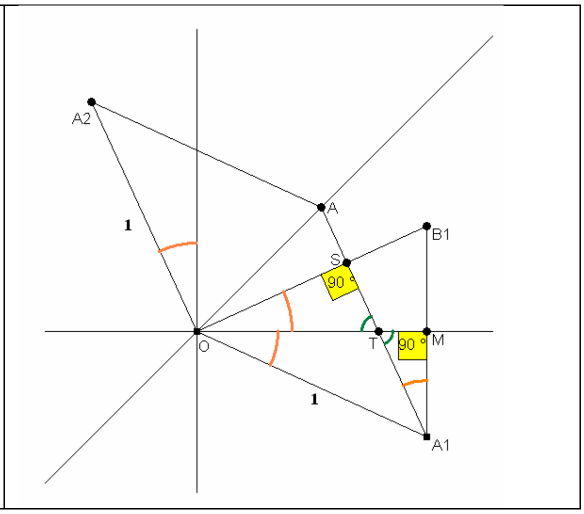


Abb. 4

Im vierten Arbeitsblatt wird die affine Abbildung beschrieben, welche die Einheitsraute OA_1AA_2 des A-Systems auf die Einheitsraute OB_1BB_2 des B-Systems abbildet (Abb. 5). Man kann sie als Verkettung zweier affiner Abbildungen deuten, nämlich der „symmetrischen“ Euleraffinität, welche die Raute OA_1AA_2 auf die Raute $OA_1'A'A_2'$ abbildet, und der zentrischen Streckung von O aus mit dem relativistischen Faktor $\gamma = (1-v^2c^{-2})^{-0,5}$, welche die letzte Raute auf die Raute OB_1BB_2 abbildet. Wir erhalten die Abbildungsgleichung:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{v}{c} \\ \frac{v}{c} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Dabei ist $\gamma = \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$

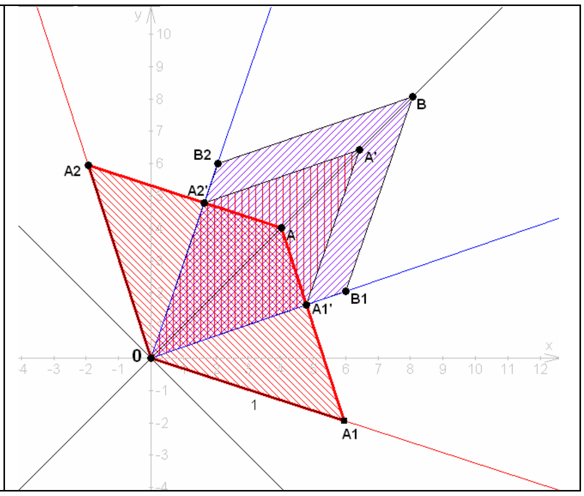
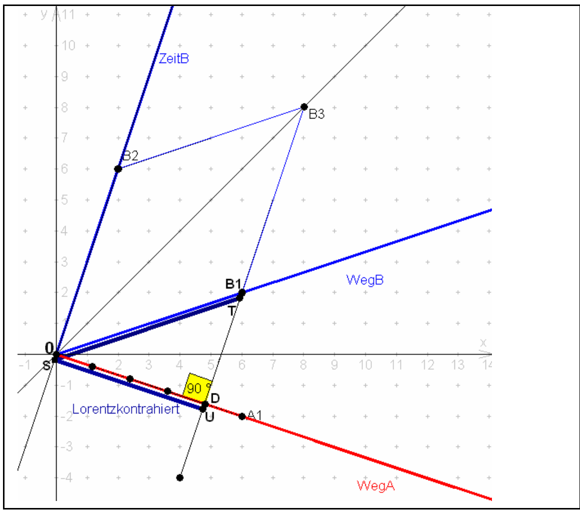


Abb. 5

Diese Matrixgleichung ist aber nichts anderes als die Lorentztransformation in „abbildungsgeometrischem Gewand“.

Im fünften Arbeitsblatt geht es um die Visualisierung der Lorentzkontraktion und der Zeitdilatation. Stellen wir uns einen starren Stab ST vor, der im eigenen B-System ruht und sich im A-System mit 60%iger Lichtgeschwindigkeit bewegt (Abb. 6). Der Beobachter A nimmt von diesem Stab nur die senkrechte Projektion SU auf die Wegachse des A-systems wahr. Es ist $\overline{SU} = (1-v^2c^{-2})^{0,5} \cdot \overline{OB_1}$



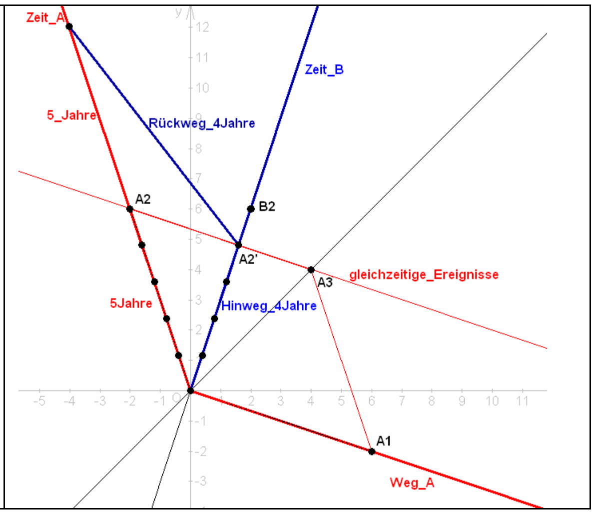


Abb. 6 *Abb. 7*

In Abb. 7 wird die Zeitdilatation durch eine Reise mit einer gleichförmig bewegten Rakete dargestellt, die sich der Zeitachse des B-Systems folgend vom A-System weg bewegt, anschließend zum in A ruhenden Beobachter (wieder gleichförmig bewegt) zurückkehrt. Während des Hinwegs sind im A-System (mit $vc^{-1} = 0,6$) 5 Jahre, im B-System lediglich 4 Jahre vergangen, das Gleiche auf dem Rückweg (Zwillingsparadoxon).

Literatur: R. Sexl, H. Schmidt: Raum, Zeit, Relativität, Vieweg-Verlag