Ervin DEÁK, Budapest

Ein neuer - didaktisch fundierter - Begriff der Verhältnisgleichheit von Streckenpaaren

0.1 Dieser Begriff ist mit derselben geometrischen Grundkonfiguration verbunden wie die Strahlensätze und leistet auch dasselbe. (Z. B. kann die übliche Ähnlichkeitslehre in gewohnter Weise entwickelt werden.) Während aber die Strahlensätze die reellen Zahlen voraussetzen, liegen unser Begriff und der entsprechende Fundamentalsatz vollständig im Bereich der reinen Kongruenzgeometrie und bereiten der Entwicklung des reellen Zahlkörpers und der Maßgeometrie einen anregungsvollen Weg im Sinne eines konstruktiv-genetischen Aufbaus dieser Disziplinen. – Es handelt sich um einen integrierenden Bestandteil einer umfassenden Neugestaltung verschiedener Gebiete der Schulmathematik auf der Grundlage einer als „fundamentale Idee” fungierenden einheitlichen, allgemeinen Idee des Messens.

1.1 (a) Grundbegriffe des „Messens” im Bereich der Strecken. Wir unterscheiden vier Allgemeinheits-Stufen des elementaren Messens. (Im Diagramm der Abb. 1 zeigen die Pfeile jeweils in die Richtung zunehmender Allgemeinheit.) Das *„<u>Messen</u>* einer Strecke g mit einer Strecke h” bedeutet

$$\begin{tikzcd} \boxed{[1a]} \arrow[r] \arrow[d] & [2a] \arrow[d] \\ \boxed{\boxed{[1b]}} \arrow[r] & [2b] \end{tikzcd}$$

Abb. 1

[1a] die Gleichung $g = q \cdot h$ mit $q \in \mathbb{N}$,

[1b] die Gleichung $g = q \cdot \frac{h}{n}$ mit $q, n \in \mathbb{N}$,

[2a] die Division mit Rest (im weiteren DmR) $g = q \cdot h + r$, $q \in \mathbb{N}$,

[2b] die DmR $g = q \cdot \frac{h}{n} + r$, $q, n \in \mathbb{N}$ und r eine Strecke kleiner als h.

(b) Existiert die Division [1a] oder eine der Divisionen [1b], so ist dadurch das Verhältnis der Strecke g zur Strecke h vollständig erfasst. Mehrere Messungen vom Typ [2b] mit verschiedenen Werten $n_1, n_2, ..., n_k$ können durch eine einzige [2b]-Messung für ein $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden, so dass aus dem zugehörigen Quotienten sämtliche Quotienten rekonstruierbar sind, die zu diesen Werten n_i gehören; für n eignet sich z. B. das k.g.V. der Zahlen) $n_1, n_2, ..., n_k$.

(c) Mit einer noch so großen, aber *endlichen* Anzahl von [2b]-Messungen kommen wir also nicht über den Wirkungsgrad einer einzigen Messung hinaus. Die entscheidende Wendung auf dem Weg zur Maßgeometrie und überhaupt zum reellen Zahlkörper bildet aber die Vorstellung, eine *unendliche* Folge von Messungen dieses Typs für $n_1, n_2, ...$ durchzuführen.

1.2 Wir formulieren in diesem Sinne vier – formal verschiedene – Definitionen der <u>*Streckenverhältnisgleichheit*</u> (im Weiteren SVG) zweier Streckenpaare $(a;a')$ und $(b;b')$. Diese Definitionen sind auf Messungen der Art [2b] gegründet.

(V1) *Die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n}$ *stimmen überein für* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(V2) *Für jede streng monoton wachsende Folge* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *von nichtnegativen ganzen Zahlen, stimmen die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n_k}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n_k}$ *für jedes* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *überein.*

(V3) *Die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{10^n}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{10^n}$ *stimmen überein für* $n = 0, 1, 2, \ldots$.

(V4) *Es gibt eine streng monoton wachsende Folge* $\{n_k\}_{k=0}^{\infty}$ *von nichtnegativen ganzen Zahlen, sodass die Quotienten beim Messen von* a' *mit* $\frac{a}{n_k}$ *und von* b' *mit* $\frac{b}{n_k}$ *für jedes* $n = 0, 1, 2, \ldots$ *übereinstimmen.*

((V3) ist eine Formulierung des Prinzips der üblichen – dem Zehnersystem angepassten – zahlenmäßigen Streckenmessung in der – auf dem reellen Zahlkörper aufgebauten – Maßgeometrie.)

1.3 Offenbar gelten die Implikationen $(\mathrm{V1}) \Leftrightarrow (\mathrm{V2}) \Rightarrow (\mathrm{V3}) \Rightarrow (\mathrm{V4})$, es gilt aber auch $(\mathrm{V1}) \Leftrightarrow (\mathrm{V2}) \Leftrightarrow (\mathrm{V3}) \Leftrightarrow (\mathrm{V4})$.

Zum Beweis würde es genügen zu zeigen, dass $(\mathrm{V4}) \Rightarrow (\mathrm{V1})$. Statt dessen schieben wir zwischen (V4) und (V1) die folgende Aussage ein:

(G) *In jeder geometrischen Konfiguration wie in Abb. 2 (φ ein beliebiger Winkel zwischen* 0° *und* 180°*) verlaufen die Sekanten AB und* $A'B'$ *parallel.*

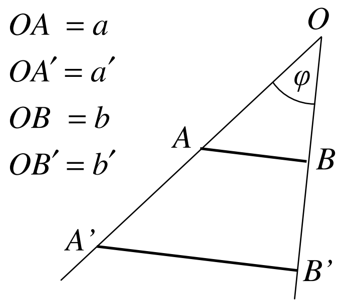


Abb. 2

(Durch das Einfügen von (G) in den Komplex der „eindimensionalen" Ausagen (V1) – (V4) erstreckt sich die ganze Problematik auf das „zweidimenionale" Problemfeld der Ähnlichkeit in der Ebene. Neben der Erweiterung der gewöhnlichsten Messungsidee auf unendliche Messungsalgorithmen bildet hier (G) den wichtigsten Motivations-Ausgangspunkt zur Proportionenehre.) $(\mathrm{G}) \Rightarrow (\mathrm{V1})$ und $(\mathrm{V4}) \Rightarrow (G)$ können sehr leicht und anschaulich bewiesen werden.

2.1 *Über einen Erfahrungshintergrund der Äquivalenz* (V1)$\Leftrightarrow$(G) *und über einen Aspekt der hier verfolgten strategischen Linie.*

(a) Der neue Begriff (V1) und seine Varianten (Abschwächungen) brauchen nicht ganz unerwartet über den Lernenden hereinzubrechen. Die Parallelität der Sekanten erscheint nämlich sehr leicht im Spezialfall, dass

1. sowohl a, a' als auch b, b' kommensurabel sind, also in einem rationalen Verhältnis stehen

2. und obendrein diese beiden Verhältnisse gleich sind.

(1. und 2. zusammen bedeuten, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, sodass sowohl a' durch $\frac{a}{n}$ als auch b' durch $\frac{b}{n}$ restlos teilbar sind und die beiden Quotienten übereinstimmen).

Aus $A'B' \| AB$ folgt dann leicht, dass für *jedes* $n \in \mathbb{N}$ der Quotient beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ derselbe ist wie beim Messen von b' mit $\frac{b}{n}$. (Allerdings kann dabei auch ein Rest auftreten (u. zw. für jedes n entweder in keiner dieser Messungen oder in beiden).

(b) Dieser Spezialfall unserer geometrischen Problematik ist das Abbild einer allgemeingültigen arithmetischer Gesetzmäßigkeit im Bereich der positiven rationalen Zahlen (wo ja zwei beliebige Elemente „kommensurabel" sind und daher das Analogon der Bedingung 1. gegenstandslos wäre):

Sind $a, a', b, b' \in \mathbb{Q}$, $p, q \in \mathbb{N}$ *und* $a' = \frac{p}{q} \cdot a$, $b' = \frac{p}{q} \cdot b$, *so gilt für jedes Paar* $m, n \in \mathbb{N}$,

$$m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n} \Leftrightarrow m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}.$$

(Unter der angegebenen Bedingung sind ja beide doppelten Ungleichungen zu $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ äquivalent.) Aus dieser arithmetischen Tatsache folgt nun die eingeschränkte geometrische Tatsache unter (a) ganz natürlich: $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q} < \frac{m+1}{n}$ ist nämlich gleichwertig sowohl mit $m \cdot \frac{a}{n} \leq a' < (m+1) \cdot \frac{a}{n}$ als auch mit $m \cdot \frac{b}{n} \leq b' < (m+1) \cdot \frac{b}{n}$, wenn a, a', b und b' Strecken mit $a' = \frac{p}{q} \cdot a$ und $b' = \frac{p}{q} \cdot b$ sind.

(c) In der Geometrie bedeutet aber die Kommensurabilitätsforderung für das Streckenpaar (a, a') und für das Streckenpaar (b, b') eine echte Einschränkung, während in der $\mathbb{Q}$-Arithmetik die analoge Forderung nichts sagend wäre.

2.2 Die allgemeine Äquivalenz (V1)$\Leftrightarrow$(G) stellt also eine echte Erweiterung der auf die rationalen Zahlen zurückführbaren eingeschränkten geometrischen Tatsache unter 2.1(a) dar, und auf dieser Erweiterung kann eine allgemeine geometrische Proportionenlehre aufgebaut werden. Allerdings wird dabei die Zahlenmäßigkeit eingebüßt. Darin liegt aber ein Motiv für die Erweiterung des rationalen Zahlkörpers zum reellen Zahlkörper, um die verlorene Harmonie von Geometrie und „Arithmetik" – auf einer höheren begrifflichen Ebene – wiederherzustellen und so zu einer echten „Maßgeometrie" zu gelangen.

2.3 (a) Von (V1) bzw. (V3) führt ein verzweigtes System von Wegen zum „zahlenmäßigen Messen" (besser: zur „zahlenmäßigen" Deutung) von Streckenverhältnissen.
(b) Der Begriff (V1) induziert unmittelbar den Gedanken, wie neben die Streckenverhältnis*gleichheit* eine Größer-Relation gestellt werden kann: „Das Verhältnis von von b' zu b ist größer als jenes von a' zu a, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass beim Messen von a' mit $\frac{a}{n}$ und von b' mit $\frac{b}{n}$ $(n = 1, 2, ...)$ der Quotient bei dem Paar (b', b) größer ist." (Geometrisch entspricht dem die Art der Nichtparallelität von $A'B'$ und AB in Abb. 3 , woraus auch erhellt, dass das Verhältnis von von b' zu b nicht größer und zugleich kleiner als jenes von a' zu a sein kann.)

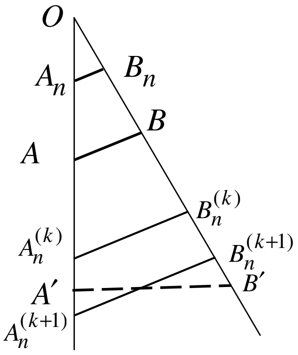
$OA = a$

$OA' = a'$

$OA_n = \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k)} = k \cdot \frac{a}{n}$

$OA_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{a}{n}$



$OB = b$

$OB' = b'$

$OB_n = \frac{b}{n}$

$OB_n^{(k)} = k \cdot \frac{B}{n}$

$OB_n^{(k+1)} = (k+1) \cdot \frac{b}{n}$

Abb. 3

3.1 (a) Von (V3) ausgehend führt dieses Prinzip zum üblichen Verfahren des Vergleichs von Streckenpaaren. Zu jedem geordneten Streckenpaar gehört nämlich eindeutig ein unendlicher Dezimalbruch – womit der entscheidende Schritt zum zahlenmäßigen Messen einer Strecke mit einer anderen Strecke getan ist –, und der Vergleich von Streckenpaaren beruht auf der üblichen (lexikographischen) Ordnung der unendlichen Dezimalbrüche.