Petr EISENMANN, Ústí n. L. (Tschechische Republik)

# Reale Experimente im Mathematikunterricht

Dieser Beitrag beschreibt ein Experiment aus dem Mathematikunterricht in der gymnasialen Oberstufe. Die Schüler führen mit ihrem Lehrer ein Realexperiment durch, stellen ein dazugehöriges mathematisches Modell zusammen, lösen es und vergleichen die Messwerte mit den aus dem mathematischen Modell erworbenen Werten.

Wir gießen etwa 0,3 l kochendes Wasser in ein Blechtöpfchen ein. Das Töpfchen muss von der Unterlage gut wärmeisoliert werden. In einem Laborständer befestigen wir ein Thermometer und messen die Lufttemperatur in dem Zimmer ($T_0$). Das Thermometer tauchen wir nach ungefähr 5 Minuten in das Wasser. Nach zirka 3 Minuten notieren wir die in der Zeit $t = 0$ gemessene Temperatur. Die Temperatur messen wir dann in regelmäßigen Abständen von 4 Minuten. Es ist sehr empfehlenswert, die Messwerte gleich in Excel einzugeben. Die Messwerte aus unserem Experiment finden wir in der Tab. 1.

Tab. 1

| Zeit | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Temp. | 72 | 69 | 64 | 59 | 56 | 53 | 50 | 47 | 45 | 43 | 42 | 40 | 39 | 38 | 37 | 35 |

Während der Messung stellen wir das dazugehörige mathematische Modell zusammen. Dieser Vorgang ermöglicht es den Schülern, die Wassertemperatur am Ende des Experiments vorherzusagen (d.h. nach ungefähr einer Stunde).

Hat eine Flüssigkeit eine höhere Temperatur als die Umgebungstemperatur, beginnt sie sich abzukühlen. Wir setzen voraus, dass das Töpfchen sich nach den oben genannten 5 Minuten auf die Wassertemperatur erwärmt hat. Unter der Umgebung verstehen wir also die Luft im Raum. Nach unserem Modell kühlt eine Flüssigkeit, deren Temperatur höher als die Umgebungstemperatur ist, zu jedem Zeitpunkt proportional zur Differenz von Eigen- und Umgebungstemperatur ab. Dieser Prozess wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{dT}{dt} = k\left(T - T_0\right) \qquad (1)$$

beschrieben, in der $T$ die Wassertemperatur ist. Für die Konstante $k$ gilt $k < 0$, denn die Änderung der Wassertemperatur (die Ableitung der

Funktion $T$ auf der linken Seite von Gleichung (1)) ist negativ, das Wasser kühlt ab.

Bestimmen wir die Lösung der Differentialgleichung (1). Durch Separation der Variablen lösen wir zunächst die zugehörige homogene Gleichung

$$\frac{dT}{dt} = kT \ .$$

Ihre allgemeine Lösung ist eine Funktion der Form

$$T = Ce^{kt} \ .$$

Durch Variation der Konstante erhalten wir dann als allgemeine Lösung der Gleichung (1) die Funktion $T(t)$ mit

$$T = T_0 + Ce^{kt} \ .$$

Jetzt müssen wir die Konstanten $C$ und $k$ bestimmen. Aus der Anfangsbedingung $T(0) = 72$ (s. Tab. 1) folgt $C = 49$ (die Lufttemperatur betrug bei unserem Experiment 23°C).

Um den Wert der Konstante $k$ zu bestimmen, wählten wir hinsichtlich des Zeitverlaufs unseres Experiments die Wassertemperatur in der zwölften Minute. Aus der Bedingung $T(12) = 59{,}5$ ergibt sich dann $k \approx -0{,}02454$.

Die partikuläre Lösung von Gleichung (1), die die Bedingungen $T(0) = 72$ und $T(12) = 59{,}5$ erfüllt, ist die gesuchte Abhängigkeit der Wassertemperatur von der Zeit, für die gilt:

$$T = 23 + 49e^{-0{,}02454t} \ . \tag{2}$$

Die berechneten Funktionswerte dieser Funktion übertragen wir in eine Tabelle neben den Messwerten (s. Tab. 2). Die zugehörigen Graphen beider Abhängigkeiten sind in Abb. 1 eingezeichnet.

Tab. 2

| Zeit | 0 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 | 44 | 48 | 52 | 56 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Messw. | 72 | 69 | 64 | 59 | 56 | 53 | 50 | 47 | 45 | 43 | 42 | 40 | 39 | 38 | 37 | 35 |
| Modell | 72 | 67 | 63 | 59 | 56 | 53 | 50 | 47 | 45 | 43 | 41 | 39 | 38 | 36 | 35 | 34 |

Am Ausgang des Experiments am Gymnasium diskutierten wir über die Übereinstimmung der Messwerte mit den Funktionswerten der Funktion (2). Die Schüler wiesen selbst auf eine Unvollkommenheit des gewählten mathematischen Modells hin. Während in der Realität die Wassertemperatur nach einer Zeit die Umgebungstemperatur erreicht, tritt sie in unserem mathematischen Modell erst im Grenzwertfall ein. Für die Funktion (2) gilt offensichtlich:

$$\lim_{t \to \infty} T(t) = 23 .$$

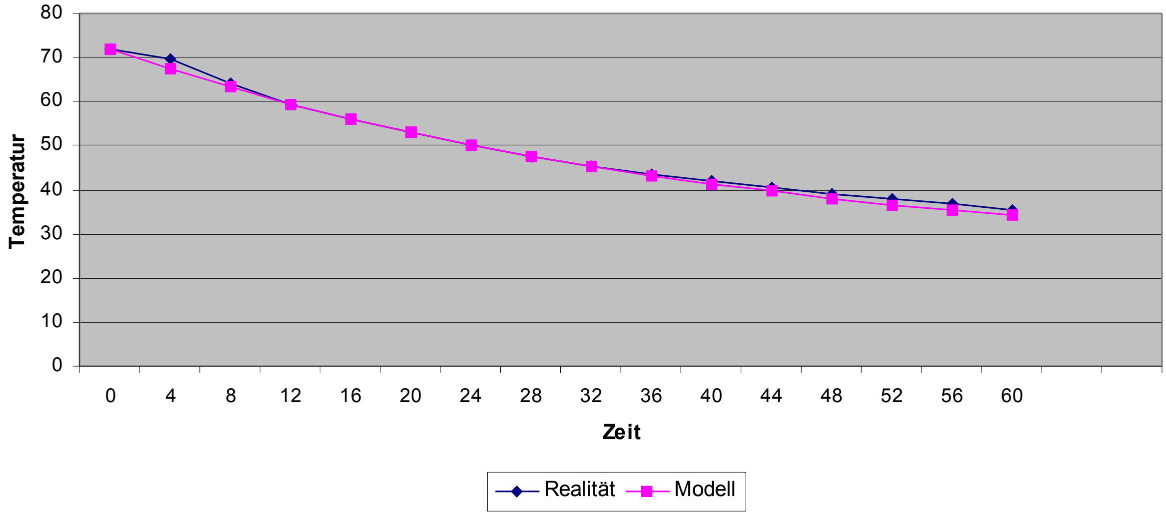


Abb. 1