

Andreas FEST, Technische Universität Berlin

Aufspannende Bäume im jahrgangsstufenübergreifenden Projektunterricht¹

Aufspannende Bäume spielen in vielen Fragestellungen der Netzplanoptimierung eine wichtige Rolle – als Teilgebiet der kombinatorischen Optimierung, also an der Schnittstelle zwischen Mathematik und Informatik. In einem jahrgangsstufenübergreifenden Projekt haben im Dezember 2007 neun Schülerinnen und Schüler der Klassenstufen 7 bis 13 eines Berliner Gymnasiums drei Tage lang alltagsrelevante Problemstellungen untersucht und mit Hilfe der algorithmischen Graphentheorie gelöst. Mit und ohne Computereinsatz entwickelten sie ihre eigenen Lösungsstrategien, auch über die gegebene Problemstellung hinaus. Dabei wurden verschiedene Methoden verwendet, um die Algorithmen darzustellen: Daumenkinos, Rollenspiele sowie Programmierung mit der Software Visage [1]. Inspiriert wurde dieses Projekt durch das entsprechende Kapitel in [4] und das Modul W1-7/8 des Berliner Rahmenlehrplans [4].

Günstig verbunden – minimale aufspannende Bäume. Das Problem des minimalen aufspannenden Baumes beschreibt die Fragestellung, in einem gegebenen Netzwerk Kanten derart auszuwählen, dass alle Knoten des Netzwerks möglichst kostengünstig miteinander verbunden sind. Anwendung finden minimale aufspannende Bäume z.B. beim Ausbau von Telekommunikations- oder Verkehrsnetzen, bei der Verkabelung von Computernetzen oder als Teilproblem in komplexeren Optimierungsaufgaben.

Begriffsbildungsphase. Die Schülerinnen und Schüler werden mit der Problemstellung konfrontiert. Sie erhalten einen Arbeitsbogen mit einer motivierenden Aufgabe sowie mehrere Bögen zum Ausprobieren ihrer Lösung. Die SuS sind dabei besonders aufgefordert über die Struktur ihrer Lösung und ihren Lösungsweg zu reflektieren. Nach einer angemessenen Bearbeitungszeit erhalten sie zusätzlich ein elektronisches Arbeitsblatt, mit dem Wegemarkierungen gesetzt bzw. entfernt und Lösungen vom PC als Schiedsrichter überprüft werden können. Mit diesem Hilfsmittel entwickeln die SuS gute Lösungen und können ihren Lösungsweg im Gespräch verbalisieren. Im Gruppengespräch werden Begriffe wie Graph und Baum gemeinsam erarbeitet.

Erarbeitungsphase. Die Erarbeitungsphase umfasst den größten Teil der

¹ Gefördert durch das DFG-Forschungszentrum MATHEON

Projektdauer. Die SuS wählen verschiedene der folgenden Schüleraktivitäten. Dabei variieren sie die Zusammenstellung der Arbeitsgruppen.

Bäume. Eigenschaften graphentheoretischer Bäume werden erforscht und Parallelen zur Natur gezogen.

Anwendungen recherchieren. Die SuS informieren sich z.B. im Internet über praxisnahe Anwendungen minimaler aufspannender Bäume.

Algorithmen verstehen. Aus den eigenen Lösungswegen werden Algorithmen entwickelt und mit Lehrbuchalgorithmen verglichen.

Daumenkinos basteln. Der Ablauf der Algorithmen wird nachvollzogen und an einem Beispiel durch das Basteln eines Daumenkinos visualisiert.

Ein Rollenspiel entwerfen. Es wird auf dem Fußboden mit rotem Absperrband und farbigem Papier ein großer Graph gebaut. Dann werden einfache Standardalgorithmen zu Rollenspielen umformuliert, die auf dem Fußboden-Graphen ausgeführt werden können.

Programmierung der Algorithmen. Selbstentwickelte bzw. Lehrbuchalgorithmen werden in Zweiergruppen mit der Software Visage [1] in der Programmiersprache CindyScript [3] implementiert. Dazu erhalten die SuS die Beispielimplementation eines Standardalgorithmus und übertragen die Implementation auf einen anderen Algorithmus. Die verwendete Programmiersprache wird dabei durch das Anwenden während des Programmierens erlernt.

Variation der Problemstellung. Die SuS wandeln die gegebene Problemstellung ab und entwickeln und implementieren eigenständig geplante Software zu weiteren Problemstellungen der kombinatorischen Optimierung.

Präsentationsphase. Die zweite Hälfte des dritten Projekttagess dient der Präsentation des Projekts für Mitschüler, Lehrer und Eltern der Projektteilnehmer. Jeder Teilnehmer muss zumindest seinen geleisteten Anteil erklären und präsentieren können. Dazu werden die Präsentationen zunächst in der Gruppe geübt.

Plakatwand. Die Problemstellung, Begriffe und Algorithmen werden auf selbst gestalteten Plakaten erläutert und visuell dargestellt. Das Daumenkino wird ausgehängt.

Das große Fußboden-Graphen-Spiel. Die Algorithmen werden im Rollenspiel auf dem Fußboden-Graphen durchgeführt und so dem Publikum erklärt. Die grundlegende Problemstellung und Lösungsvarianten können im Gespräch diskutiert werden.

Computerpräsentation. Die erstellten Computerprogramme und Visualisierungen werden am Bildschirm und Beamer vorgeführt und können vom Publikum ausprobiert werden. Details zur Implementation werden mündlich dargestellt.

Erfahrungen & Fazit. Dieses Unterrichtsprojekt wurde von den teilnehmenden Schülerinnen und Schülern so gut angenommen, dass von ihnen der Wunsch ausging, die Arbeit mit ähnlichen Projekten in einer Arbeitsgemeinschaft in gleicher Zusammensetzung fortzuführen. Der Erfolg des Projekts basierte dabei vor allem auf drei Säulen: der sehr breiten Altersmischung, der praxisorientierten Problemstellung sowie der Möglichkeit, eigene Algorithmen zu programmieren.

Letzteres wurde von den Projektteilnehmern ausdrücklich gewünscht und war für sie ein Kriterium, an dem Projekt teilzunehmen. Dank der leicht zu erlernenden Programmiersprache CindyScript und ihrer guten Integration in die Geometrie-Software Cinderella [3] war es sogar den SuS der achten Klasse möglich, ohne Vorkenntnisse eigene interaktive Arbeitblätter zu entwerfen. Die SuS höherer Klassenstufen haben die untersuchten Algorithmen problemlos in überraschend kurzer Zeit implementieren können. Eine Visualisierung des Algorithmus von Kruskal war innerhalb von 2,5 Stunden fertig programmiert. Das Programmieren der Algorithmen hilft den SuS dabei, das Verständnis der Algorithmen zu vertiefen, indem es ein nochmaliges mentales Strukturieren der Algorithmen verlangt. Darüber hinaus ist das Programmieren ein fester Bestandteil des Arbeitens in der kombinatorischen Optimierung. Somit wird den SuS das Bild eines authentischen Arbeitens in diesem Gebiet vermittelt.

Der jahrgangsstufenübergreifende Unterricht ermöglichte das Ausführen von Schüleraktivitäten auf unterschiedlichsten Schwierigkeitsleveln. Von Vorteil ist die Altersmischung besonders, da ältere SuS den jüngeren bei Verständnisproblemen sowie der Verbalisierung ihrer Ergebnisse (z.B. bei der Begriffsbildung oder der Formulierung in den Ausarbeitungen) helfen konnten. Während sich am Anfang des Projekts altershomogene Gruppen bildeten, brach im Verlauf des Projekts diese Trennung immer mehr auf. Allerdings zeigt sich die Gruppe hierbei insgesamt zu klein, so dass die Gruppendynamik zwischen den einzelnen Schüleraktivitäten zum Teil ausbaufähig gewesen wäre. Ideal wäre wohl eine Gruppe mit 15-20 Teilnehmern gewesen.

Vor allem die Möglichkeiten, die die Visualisierungssoftware Visage [1] den SuS bot, führte zu überraschenden Ergebnissen. So wurde eine Gruppe aus drei Achtklässlern durch das elektronische Arbeitsblatt dazu angeregt, eigene Arbeitsblätter mit variierten Aufgabenstellungen zu entwerfen. Sie zeichneten einen vereinfachten Stadtplan und stellten die Aufgabe, eine Stadtrundfahrt zu allen Sightseeingpunkten der Stadt zu planen. Ihr anfänglicher Lösungsansatz eines minimalen aufspannenden Baumes ist für diese Variante des Traveling-Salesman-Problems zwar suboptimal, da eine Baumlösung von einem Taxi doppelt abgefahren werden müsste, jedoch

konnten im vom Lehrer gelenkten Gruppengespräch hieraus die Prinzipien der Double-Tree-Approximation für das TSP (vgl. [2]) hergeleitet werden, ein wichtiges Ergebnis der kombinatorischen Optimierung, das sonst erst Mathematikstudenten in Vertiefungsvorlesungen lernen.

Eine weitere Gruppe älterer SuS nutzte ihre erlernten Programmierfähigkeiten, um einen Online-Routenplaner zur Bestimmung optimaler Wege im Berliner U-Bahnnetz zu programmieren und ihre Lösung mit der Software Visage zu visualisieren. Dabei implementierten sie den Dijkstra-Algorithmus für kürzeste Wege (vgl. [2]).

Auch wenn sich bei diesem Thema die Vorteile der jahrgangsstufenübergreifenden Projektarbeit als besonders positiv erwiesen, halten wir das Thema auch für die Behandlung im Klassenverband ab Klasse 7 als sehr geeignet, so wie es im Berliner Rahmenlehrplan [4] vorgeschlagen wird. Hierbei sind jedoch die anzubietenden Aktivitäten entsprechend der Klassenstufe auszuwählen.

Der Einsatz der Lernsoftware Visage erwies sich als sehr hilfreich bei der Strukturierung der Gedankengänge der SuS und motivierte sie, über die eigentliche Aufgabenstellung hinaus eigene Ideen zu verfolgen. Wird die Software zur Programmierung selbst entwickelter Lösungen eingesetzt, sind ausführliche Kenntnisse des Lehrers jedoch unverzichtbar, damit er den SuS die notwendigen Hilfestellungen geben kann.

Insgesamt ist zu konstatieren, dass in diesem Projekt die Lernziele der Module W1 7/8 und W1 9/10 des Berliner Rahmenlehrplans [4] erreicht wurden. Insbesondere konnten die prozessbezogenen Kompetenzen *Argumentieren*, *Probleme lösen*, *Modellieren*, *Darstellungen verwenden* und *Kommunizieren* der Schülerinnen und Schüler gefördert werden.

Das Projekt wurde zusammen mit Frau Kira Steffen an der Luise-Henriette-Schule in Berlin-Tempelhof im Rahmen der Projekttag zum Thema „Spannungen“ durchgeführt. Materialien zum Projekt können von der Projekt-Homepage [1] geladen werden.

Literatur

- [1] A. Fest, U. Kortenkamp: Visage – Visualisierung von Graphenalgorithmen. <http://www.cinderella.de/visage/>
- [2] B. Korte, J. Vygen: Combinatorial Optimization. Springer 2001
- [3] U. Kortenkamp, J. Richter-Gebert: Cinderella.2 – Die interaktive Geometrie-Software. <http://www.cinderella.de/>
- [4] B. Lutz-Westphal: Günstig verbunden – Minimal aufspannende Bäume. In S. Hußmann, B. Lutz-Westphal (Hrsg.): Kombinatorische Optimierung erleben. In Schule und Studium, Vieweg 2007
- [5] Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe I, Fach Mathematik, Senatsverwaltung für Bildung, Jugend und Sport, Berlin 2006