Andreas FILLER, Heidelberg

Modellierung als Entwurf von Prozessen: Wie müssen die Aufzüge fahren, damit das Chaos aufhört?

Im Vordergrund didaktischer Diskussionen und Untersuchungen zur mathematischen Modellierung stehen Modelle, die reale Situationen möglichst gut beschreiben, erklären, teilweise auch prognostizieren und einer mathematischen Lösung zugänglich machen (deskriptive Modelle, vgl. [3], [5] und [6]). Hierzu findet sich in der mathematikdidaktischen Literatur eine Fülle von Anregungen. Von deskriptiven Modellen werden normative Modelle unterschieden, wofür jedoch wesentlich weniger Beispiele vorliegen. In dem vorliegenden Beitrag soll anhand einer Beispielaufgabe auf Modelle eingegangen werden, die sich als normative Modelle bezeichnen ließen; allerdings erscheinen die in der Informatik gebräuchlichen Begriffe „Entwurfsmodell“ bzw. „Prozessmodell“ geeigneter (vgl. z. B. [7] und [8]).

Ein Blick auf den sehr vielseitigen und verzweigten Modellbegriff der Informatik (die mitunter als die „Wissenschaft von der Modellbildung“ bezeichnet wird und auf einen sehr allgemeinen Modellbegriff aufbaut, vgl. [1] und die Bezugnahme darauf in [7] und [8]) erscheint u. a. lohnenswert, um das Spektrum der im Mathematikunterricht behandelten Modelle zu erweitern. Zum Unterschied zwischen Modellierung im Mathematik- und Informatikunterricht schrieb Schwill: „*Originale mathematischer Modellierung sind überwiegend Teil der natürlichen Welt. Meist stehen sie im Zusammenhang mit Problemen geometrischen oder physikalischen Charakters ... und beruhen auf (in der Schule) wenigen quantifizierbaren Daten, die funktional miteinander verbunden sind. Die Informatik modelliert meist Sachverhalte, die einer vom Menschen geschaffenen Welt entstammen (z. B. Bürovorgänge, Fahrzeugströme, ...). Damit fehlt ihnen eine natürliche Einfachheit*“ ([7], S. 23). Diese Sicht (eines Informatikdidaktikers) auf Modellbildungen im Mathematikunterricht entspricht sicherlich den hauptsächlich behandelten Modellen und entsprechenden Unterrichtsvorschlägen, charakterisiert aber m. E. keine Grenzen mathematischer Modellierung. Vielmehr sind mathematische Methoden auch leistungsfähig, um von Menschen geschaffene Sachverhalte oder Prozesse nicht nur zu beschreiben, sondern auch möglichst optimal zu gestalten bzw. zu verändern. Dies soll im Folgenden anhand einer Aufgabe illustriert werden, der hauptsächlich eine in der Informatik sehr gebräuchliche Art von Modellen (Entwurfsmodelle, spezieller handelt es sich hier um Prozessmodelle) zugrundeliegt. Die Lösungswege hingegen beruhen hauptsächlich auf mathematischen Überlegungen und Hilfsmitteln; die Vorgehensweise des

Modellierens lässt sich gut durch ein mehrfaches Durchlaufen des bekannten Modellierungskreislaufes nach Blum ([2], S. 200) beschreiben. Die Aufgabe (aus dem niederländischen Mathematikwettbewerb „A-lympiade“, vgl. [9]; im Folgenden nur sehr verkürzt wiedergegeben) wurde in einem Schülerzirkel mit Schülern 7. und 8. Klassen erprobt.

> Ein Hochhaus mit 1200 Angestellten hat ein Erdgeschoss und die Etagen 1 bis 20, in denen jeweils 60 Angestellte arbeiten. Es gibt 6 Aufzüge mit einer Kapazität von jeweils 20 Personen. Zu Arbeitsbeginn kommt es zu chaotischen Situationen und langen Wartezeiten. Die Direktion stellt eine Aufsicht ein, die Maßnahmen ergreifen soll, um den Strom der Angestellten flüssiger verlaufen zu lassen. Folgende Fakten zur Geschwindigkeit der Aufzüge werden ermittelt:
>
> - Zeitbedarf von Stillstand bis zu Stillstand ein Stockwerk höher oder tiefer: 8 s
> - Von Stillstand bis Passieren des nächst höher oder tiefer gelegenen Stockwerks: 5 s
> - Zeit zwischen dem Passieren zweier benachbarter Stockwerke: 3 s
> - Vom Passieren einer Etage bis zum Stillstand in einem benachbarten Stockwerk: 6 s
> - Ein Aufzug steht in einem Stockwerk durchschnittlich 10 s still.
>
> Alle Angestellten kommen zwischen 8:45 und 9:00 herein (gleichmäßiger Strom.
>
> **Aufgabe I:** Wie lange kann ein Fahrstuhl insgesamt im schlimmsten Falle unterwegs sein, bis er wieder im Erdgeschoss ankommt? Berechnet, wie lange es ungefähr dauert, bis alle Angestellten auf dem richtigen Stockwerk angekommen sind.

Bei diesem Aufgabenteil ist zunächst ein deskriptives Modell zu erstellen, wozu vor allem die Idealisierung vorzunehmen ist, dass die Aufzüge auf jeder Etage halten.[1] Für die Mathematisierung muss die Fahrt eines Aufzugs beschrieben werden (Abb. 1), woran sich sehr elementare Rechnungen anschließen.

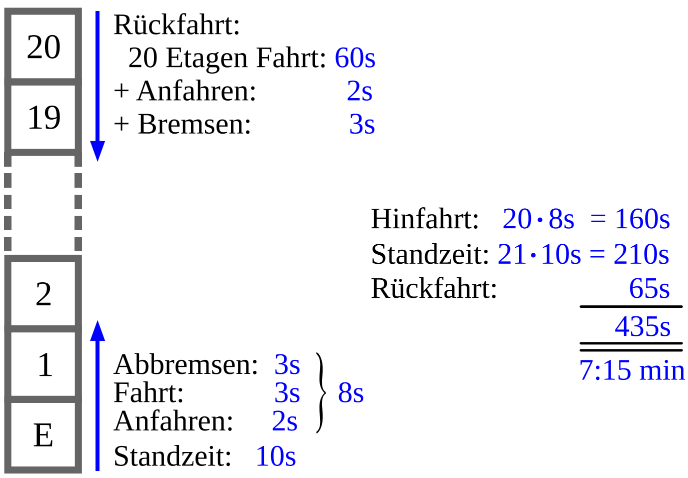

Abbildung 1

Als Ergebnis erhält man (bei Annahme des unwahrscheinlichen schlimmsten Falles) eine Fahrzeit von 7:15 min je Aufzug, womit der Transport insgesamt ca. 71 Minuten dauert. Obwohl die reinen Berechnungen sehr elementar sind, traten bei den beteiligten Schülern viele Fehler (vor allem

[1] Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist äußerst gering: $\frac{20!}{20^{20}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-8}$. Dennoch erschien die Modellannahme den Schüler selbstverständlich (Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerte waren ihnen noch nicht vertraut). Wichtig ist es m. E., zu betonen, dass es sich um den schlimmsten Fall handelt und die Situation i. Allg. weniger dramatisch ist.

aufgrund vergessener Stand- und Bremszeiten) auf, die jedoch im Gespräch gegenseitig korrigiert werden konnten, wobei eine Schema ähnlich zu Abb. 1 gemeinsam entwickelt wurde. Es schloss sich ein zweiter Aufgabenteil an, wobei nun drei Aufzüge nur die Stockwerke 1-10 und drei Aufzüge die Stockwerke 11-20 bedienten und sich im Ergebnis bereits eine erhebliche Verbesserung der Situation einstellte.

Wesentlich offener sind die Aufgaben III und IV gehalten:

> Überlegt euch mindestens drei Fahrpläne für eine schnellere Abwicklung des Aufzugsverkehrs. Benennt für jedes Modell Argumente, die dafür oder dagegen sprechen.
>
> Verfasst ein Konzept für die Direktion, in dem ihr Vorschläge, wie der Menschenstrom zügiger weitergeleitet werden kann, vorstellt. Stützt das Konzept durch Berechnungen.
>
> Entscheidet, inwiefern ihr folgenden Umständen Rechnung tragen wollt:
>
> - Die Angestellten möchten nicht zu viel gegängelt werden und keine zu komplizierte Regelung – aber sie wollen schnell ankommen.
> - Die Direktion hat ihren Sitz im 15-ten Stockwerk und hätte in eurem Konzept am liebsten eine Vorzugsbehandlung.

Von den Schülern wurden folgende Vorschläge unterbreitet:

1. Die drei Aufzüge, welche zunächst die Stockwerke 1-10 bedienen, helfen den oberen Aufzügen, wenn sie mit den unteren Etagen fertig sind.
2. Bewohner der oberen Stockwerke müssen im 10. Stockwerk umsteigen. Dann benötigen die oberen Aufzüge weniger Zeit.
3. Jeder Aufzug steuert nur 3-4 Etagen an.
4. Die 3 Aufzüge, die in die unteren Etagen fahren, steuern mehr Etagen an (z. B. 1-11), als diejenigen, die in die oberen Etagen fahren.

Nach Diskussionen wurden die Vorschläge 3 und 4 bevorzugt. Die Schüler berechneten einige Beispiele, wobei die Erkenntnis reifte, dass ein systematischeres Vorgehen sinnvoll wäre. Es wurde ein Term für die Fahrtdauer eines Aufzugs aufgestellt, der die Etagen *n* bis *m* bedient (Abb. 2):

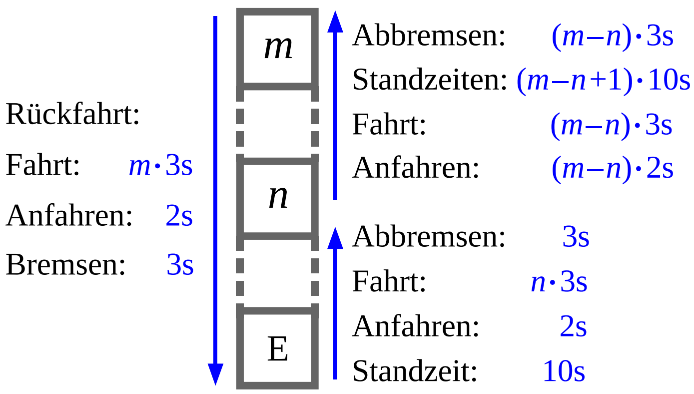

Abbildung 2

$$3m+5 \;+\; 3n+15 \;+\; 8(m-n)+10(m-n+1) \;=\; 21m-15n+30\,.$$

Unter Berücksichtigung der Anzahl $(m-n+1)\cdot 60$ von Angestellten, die in den Stockwerken *n* bis *m* arbeiten und der Kapazität der Aufzüge konnten die Schüler die Gesamtdauer für den Transport aller Angestellten in die Etagen *n* bis *m* berechnen, falls nur ein Aufzug in diese Etagen fährt:

$3 \cdot (m-n+1) \cdot (21m-15n+30)$. Auch hierbei traten diverse Fehler auf, die jedoch im Gespräch aufgeklärt werden konnten.

Unter Nutzung des aufgestellten Terms konnten die Schüler nun mithilfe einer Tabellenkalkulation viele verschiedene Varianten vergleichen und optimieren.

2 Aufzüge je Etage				
Aufzüge	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1 und 2	1	7	1701	28
3 und 4	8	14	2142	35
5 und 6	15	20	2025	33

1 Aufzug je Etage				
Aufzug	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1	1	4	1188	19
2	5	8	1476	24
3	9	11	1134	18
4	12	14	1296	21
5	15	17	1458	24
6	18	20	1620	27

1 Aufzug / Etage, Direktion bevorzugt				
Aufzug	von n	bis m	Zeit (s)	in min
1	1	5	1800	30
2	6	9	1548	26
3	10	13	1836	31
4	14	15	810	14
5	16	18	1512	25
6	18	20	1620	27

Die Bearbeitung der skizzierten offenen Modellierungsaufgabe erstreckte sich über zwei Zirkel von je 90 Minuten. Möglichst günstige Abläufe zu entwerfen, stellte für die Schüler eine reizvolle Herausforderung dar.

Ein Blick auf Modellierungskonzepte der Informatik kann auch Modellierungen im Mathematikunterricht bereichern. Entwurfsmodelle können dazu beitragen, den Modellierungskreislauf mehrfach zu durchlaufen und die Phasen der Strukturierung sowie Rückübertragung stärker zu betonen.

Literatur

[1] Apostel, L.: Towards the formal study of models in the non-formal sciences. In: Freudenthal, H. (Hrsg.): The concept and the role of the model in mathematics and natural and social sciences. Dordrecht: Reidel, 1961.

[2] Blum, W.: Anwendungsorientierter Mathematikunterricht in der didaktischen Diskussion. In: Mathematische Semesterberichte 32 (1985), 2, S. 195-232.

[3] Blum, W.: Anwendungsbezüge im Mathematikunterricht – Trends und Perspektiven. In: Kadunz et al. (Hrsg.): Trends und Perspektiven. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik, Bd. 23. Wien: Hölder-Pichler-Tempsky, 1996, S. 15-38.

[4] Blum, W.: Mathematisches Modellieren – zu schwer für Schüler und Lehrer? In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2007. Hildesheim: Franzbecker, S. 3-12.

[5] Henn, H.-W.: Warum manchmal Katzen vom Himmel fallen. Oder: Von guten und schlechten Modellen. In: Hischer, H. (Hrsg.): Modellbildung, Computer und Mathematikunterricht. Hildesheim: Franzbecker, 1999, S. 9-17.

[6] Maaß, K.: Mathematisches Modellieren. Berlin: Cornelsen Scriptor, 2007.

[7] Schwill, A.: Fundamentale Ideen in Mathematik und Informatik. In: Hischer, H.; Weiß, M. (Hrsg.): Fundamentale Ideen. Hildesheim: Franzbecker, 1995.

[8] Thomas, M.: Informatische Modellbildung. Dissertation. Univ. Potsdam, 2002.

[9] The Mathematics A-lympiad: **http://www.fi.uu.nl/alympiade/en**; dt. Übersetzungen: **http://www.learn-line.nrw.de/angebote/alympiade**.