Rudolf FRITSCH, München, Milan KOMAN, Prag

Schwerpunktkurven

Die folgenden Beispiele – während eines Gastaufenthaltes des erstgenannten Autors in Prag entwickelt – sollen Lehrer anregen, ähnliche Fragen selbst zu finden sowie mit Dynamischer Geometrie Software und Computer-Algebra-Systemen zu behandeln.

Wir untersuchen einparametrige Scharen von Dreiecken und Vierecken mit festem Umkreis und bestimmen die geometrischen Örter der verschiedenen Schwerpunkte: Eckenschwerpunkt, Kantenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt; im Fall von Dreiecke fallen Eckenschwerpunkt und Flächenschwerpunkt bekanntlich zusammen, bei Vierecken gilt dies nur für Parallelogramme. Mit Hilfe der Dynamischen Geometrie-Software Cabri und dem zugehörigen Befehl „locus“ visualisieren wir die zugehörigen Ortskurven; es handelt sich um algebraische Kurven, deren Gleichungen wir mit dem Computer-Algebra-System Maple bestimmen.

Als erstes Beispiel nehmen wir alle Dreiecke mit festem Umkreis und einer festen Seite. Der geometrische Ort des Eckenschwerpunkts ist offensichtlich das Bild des Umkreises unter der zentrischen Streckung mit dem Mittelpunkt der festen Seite als Zentrum und dem Faktor 1/3. Für den geometrischen Ort des Kantenschwerpunkts – das ist der Inkreismittelpunkt des Seitenmittendreiecks, der so genannte Spiekerpunkt des Dreiecks – finden wir eine interessantere Kurve, eine deformierte 8 (Abb. 1).

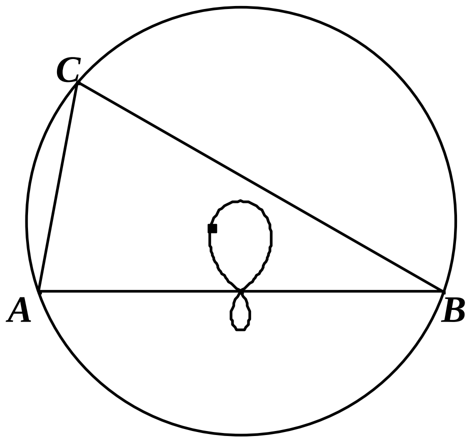

Abb. 1

Die feste Seite ist die Seite [$\boldsymbol{AB}$]. Zur algebraischen Beschreibung wählen ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Mittelpunkt der Strecke [$\boldsymbol{AB}$] als Ursprung und dem Punkt $\boldsymbol{B}$ als Einheitspunkt auf der x-Achse, das heißt wir haben $\boldsymbol{A}(-1,0)$, $\boldsymbol{B}(1,0)$. Der Mittelpunkt des festen Umkreises habe die Koordinaten $(0,\boldsymbol{h})$; damit ergibt sich für den Radius $\boldsymbol{r} = \sqrt{1+\boldsymbol{h}^2}$. Die dritte Ecke $\boldsymbol{C}(x,y)$ bewegt sich auf dem festen Umkreis. Mithilfe von Maple finden wir die Gleichung der Kurve

$$4\left(\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+\boldsymbol{h}\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{y}\right)^2 -$$
$$-\boldsymbol{r}^2\left(\left(4\boldsymbol{x}^2+12\boldsymbol{y}^2+\boldsymbol{h}^2-\boldsymbol{r}^2\right)\left(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2\right)^2+4\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2+4\boldsymbol{h}^2\boldsymbol{r}^2\boldsymbol{y}^2\right)=0,$$

die in zwei Komponenten zerfällt.

$$2\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)\left(r^2-hr+4ry\right)-2r^2x^2=0$$

und

$$2\left(x^2+y^2\right)^2+\left(x^2+y^2\right)\left(r^2+hr-4ry\right)-2r^2x^2=0.$$

Plotted man die Komponenten und die Gesamtkurve, so ergeben sich folgender Bilder (Abb. 2)

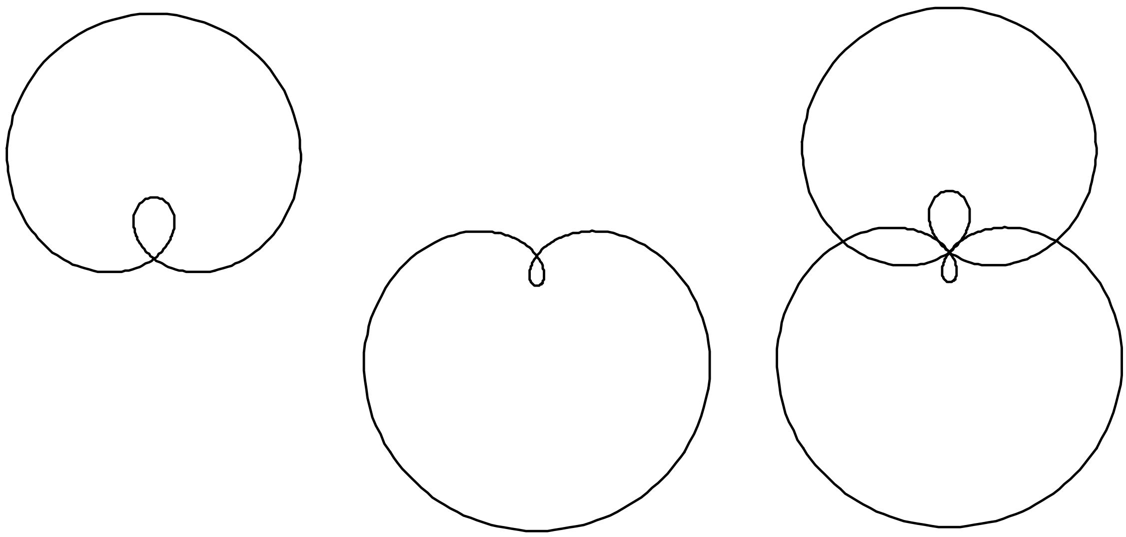

Abb. 2

Die Ortskurve des Kantenschwerpunktes setzt sich aus den beiden inneren Schleifen zusammen. Dann stellt sich die Frage nach der geometrischen und eventuell auch der physikalischen Bedeutung der übrigen Kurventeile.

Die geometrische Frage hat eine nahe liegende Antwort. Da die inneren Schleifen die Ortskurve des Inkreismittelpunkts des Mittendreiecks darstellen, sind die übrigen Kurventeile die Ortskurven der Ankreismittelpunkte des Mittendreiecks.

Physikalisch wird der Kantenschwerpunkt eines Dreiecks ermittelt, in dem man das homogene Massensystem durch ein System von Massenpunkten ersetzt: Als Punkte nimmt man die Seitenmitten und bringt in jedem Punkt das Gewicht der zugehörigen Seite als Masse an; die Gewichte sind proportional den Seitenlängen. Versieht man nun eine der Massen mit dem umgekehrten Vorzeichen, so erhält man den entsprechenden Ankreismittelpunkt als Schwerpunkt.

Als zweites betrachten wir Dreiecke mit festem Umkreis und fester Transversale, die vom Mittelpunkt halbiert wird. Dabei ergeben sich verschiedene Formen für die Ortskurve des Eckenschwerpunktes, abhängig vom Verhältnis $\boldsymbol{s}$ der Länge der Transversale zum Durchmesser des Umkreises (Abb. 3).

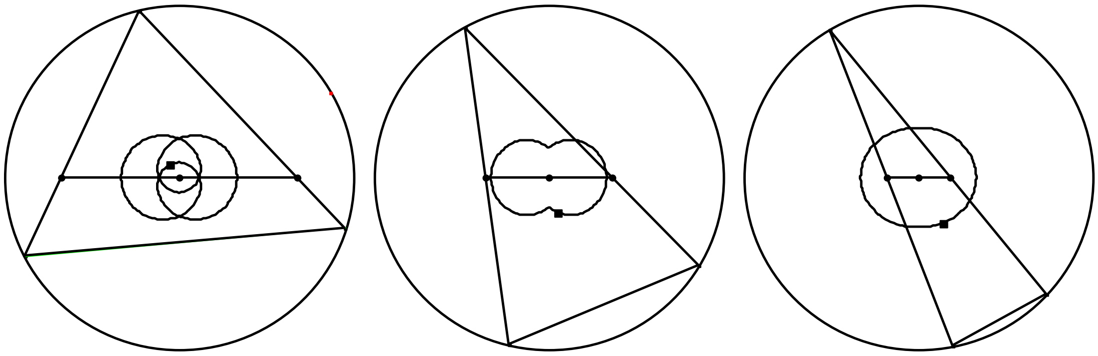

Abb. 3

Zur algebraischen Darstellung nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem, den Einheitskreis als Umkreis sowie als Transversale die Strecke, die die Punkt $[0,-\boldsymbol{s}]$ und $[0,\boldsymbol{s}]$ verbindet. Damit erhält man die Gleichung:

$$(\boldsymbol{s}^2+1)^2(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)^3-(\boldsymbol{x}^2+\boldsymbol{y}^2)((\boldsymbol{s}^2+1)(6\boldsymbol{s}^4-\boldsymbol{s}^2+1)\,\boldsymbol{x}^2+$$
$$+(2\boldsymbol{s}^6+13\boldsymbol{s}^4-4\boldsymbol{s}^2+1)\,\boldsymbol{y}^2)+\boldsymbol{s}^2(3\boldsymbol{s}^2-1)(3\boldsymbol{s}^4+\boldsymbol{s}^2+2)\,\boldsymbol{x}^2+$$
$$+\boldsymbol{s}^2(\boldsymbol{s}^6+20\boldsymbol{s}^4-11\boldsymbol{s}^2+2)\,\boldsymbol{y}^2-\boldsymbol{s}^4(3\boldsymbol{s}^2-1)^2=0.$$

Bei den folgenden Werten für $\boldsymbol{s}$ ändert sich die Form der Ortskurve:

$\boldsymbol{s}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\approx 0{,}58$: zwei innere Schleifen, die sich berühren,

$\boldsymbol{s}=\sqrt{2}-1\approx 0{,}41$: zwei Spitzen,

$\boldsymbol{s}\approx 0{,}25$ (positive reelle Wurzel des Polynoms $3\boldsymbol{s}^6-11\boldsymbol{s}^4+17\boldsymbol{s}^2-1$): Die Wendepunkte verschwinden.

Das dritte Beispiel besteht aus einer Schar von konvexen Sehnenvierecken im Einheitskreis, deren Diagonalen sich in einem festen inneren Punkt $\boldsymbol{S}$ des Einheitskreises senkrecht schneiden. Alle diese Sehnenvierecke haben den gleichen Eckenschwerpunkt und den gleichen Flächenschwerpunkt. Der Eckenschwerpunkt ist der Mittelpunkt der Strecke $[\boldsymbol{OS}]$ ($\boldsymbol{O}$ bezeichnet den Ursprung), der Flächenschwerpunkt teilt die Strecke $[\boldsymbol{OS}]$ im Verhältnis 1:2. Die Ortskurve des Kantenschwerpunktes ist eine konvexe geschlossene Kurve (Abb. 4), deren eiförmige Form nur klar hervortritt, wenn der Punkt $\boldsymbol{S}$ in der Nähe des Randes des Einheitskreises gewählt wird. (Abb. 5).

Zur Ermittlung der Gleichung der Kurve haben unsere Möglichkeiten nicht ausgereicht. Sie wurde von Gregor Kemper, dem Inhaber des Lehrstuhls für Algorithmische Algebra an der Technischen Universität München bestimmt.

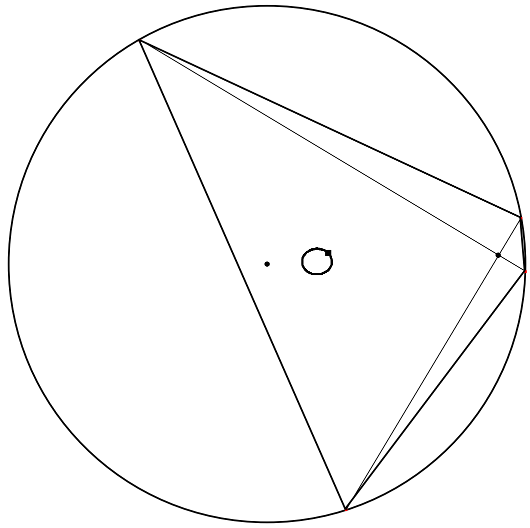

Abb. 4

Die Gleichung lautet:

$$8\boldsymbol{s}^2\boldsymbol{x}^2(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)^2 - 8\boldsymbol{sx}(\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2)((3\boldsymbol{s}^2+1)\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{s}^2 + 1)\boldsymbol{y}^2) +$$
$$+2(13\boldsymbol{s}^4 + 17\boldsymbol{s}^2 - 8)\boldsymbol{x}^4 + 4(5\boldsymbol{s}^4 + 14\boldsymbol{s}^2 - 8)\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{y}^2 + 2(\boldsymbol{s}^4 + 11\boldsymbol{s}^2 - 8)\boldsymbol{y}^4 -$$
$$- 4\boldsymbol{sx}((3\boldsymbol{s}^4 + 13\boldsymbol{s}^2 - 10)\boldsymbol{x}^2 + (\boldsymbol{s}^4 + 11\boldsymbol{s}^2 - 10)\boldsymbol{y}^2) +$$
$$+ \boldsymbol{s}^2((2\boldsymbol{s}^4 + 35\boldsymbol{s}^2 - 33)\boldsymbol{x}^2 + (13\boldsymbol{s}^2 - 17)\boldsymbol{y}^2) - 10\boldsymbol{s}^3(\boldsymbol{s}^2 - 1)\boldsymbol{x} + \boldsymbol{s}^4(\boldsymbol{s}^2 - 1) = 0.$$

Dabei bezeichnet $\boldsymbol{s}$ die Länge der Strecke [$\boldsymbol{OS}$].

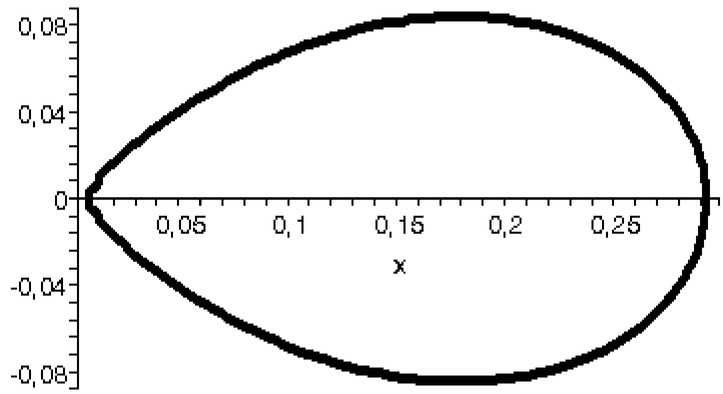

Abb. 5

Abb. 5. zeigt die Ortskurve für $\boldsymbol{s}$ = 0,9998.

Literatur

Milan Koman, Rudolf Fritsch: Jak se pohybují těžiště proměnných trojúhelníků·vepsaných do pevné kružice, Seiten 16-25 in: Ani jeden matematický talent anzmar, Hradec Králové: 2007 ISBN 978-80-7290-332-0