Günter GRAUMANN, Bielefeld

Warum ist bei „reiner“ Musik Gis ≠ As ?
Ein Problemfeld zur Aufklärung über die reine Stimmung mittels Bruchrechnung

Um ca. 600 v. Chr. wurde in Ägypten aus der weit verbreiteten Fünftonreihe (Pentatonik) eine ***siebenstufigen Tonleiter (Heptatonik)*** entwickelt. ***Pythagoras*** hat sie vermutlich dort kennen gelernt. Seine danach entwickelte Musiktheorie, in der die Tonschritte bzw. Tonintervalle[1] durch Verhältnisse von Saitenlängen beschrieben werden, wurde zur Grundlage der gesamten abendländischen Musik.
Die Oktave mit dem Verhältnis 2:1 (bzw. 1:2)[2] wird zunächst unterteilt in die Quinte mit dem Verhältnis 3:2 und die Quarte mit dem Verhältnis 4:3. Der Schritt von der Quarte zur Quinte (Ganzton bzw. Sekunde genannt) wurde von Pythagoras als Grundschritt der siebenstufigen Tonleiter gewählt; sein Verhältnis ergibt sich[3] aus $\frac{3}{2}:\frac{4}{3}$ zu $\frac{9}{8}$. Damit baut Pythagoras die gesamte Tonleiter auf: Zwischen der Sekunde und Quarte wird die pythagoreische Terz – bestehend aus der Summe zweier Ganztöne – und zwischen Quinte und Oktave werden die Sexte und Septime (als Summe aus Quinte und Ganzton bzw. Quinte und Terz) eingefügt.
Der Schritt zwischen Terz und Quarte bzw. Septime und Oktave ist allerdings kein Ganzton, sondern wesentlich kleiner und wird deshalb Halbton[4] genannt. Die pythagoreische Terz hat das Verhältnis $\frac{9}{8}\cdot\frac{9}{8}=\frac{81}{64}$.

Da dieses Verhältnis nicht mehr aus kleinen Zahlen besteht, hat man schon kurz nach Pythagoras diese Tonleiter leicht abgewandelt. Als Verhältnis für

[1] Die Tonschritte bzw. Tonintervalle (bezogen auf den Grundton) werden der Reihe nach heute mit den lateinischen Ordinalzahlen bezeichnet: Prime, Sekunde, Terz, usw.
[2] Es ist das Verhältnis der entsprechenden Saitenlängen je nachdem wie herum man es sieht; es ist aber nach heutiger Kenntnis auch das Verhältnis der Wellenlängen und der Schwingungsdauer (Perioden) sowie das umgekehrte Verhältnis der Schwingungsfrequenzen. Da ich später auch mit Frequenzen arbeite, werde ich im Folgenden die Verhältniszahlen der Frequenzen verwenden.
[3] Die Verhältniszahlen entwickeln sich exponentiell, denn die Doppeloktave (Oktave der Oktave) hat offensichtlich das Verhältnis 4:1 und die Dreifachoktave das Verhältnis 8:1 usw. Die Addition bzw. Subtraktion von Tonintervallen entspricht daher der Multiplikation bzw. Division der zugehörigen Verhältnisse
[4] Der pythagoreische Halbton errechnet sich aus $\frac{4}{3}:\frac{81}{64}$ zu $\frac{256}{243}\approx 1{,}053\approx\sqrt{\frac{9}{8}}$. (Man beachte, dass die Halbierung eines Intervalls wegen des exponentiellen Wachstums der Verhältniszahlen der Quadratwurzel der zugehörigen Verhältniszahl entspricht.)

die Terz wurde dann statt $\frac{81}{64}$ die Zahl $\frac{80}{64} = \frac{5}{4}$ gewählt, was als wesentlich harmonischer empfunden wird[5]. Diese Terz wird deshalb oft auch als „harmonische Terz“ oder ***„reine Terz“*** bezeichnet. Die Folge davon ist allerdings, dass man mit einem *großen und einem kleinen Ganzton* (vom Grundton zur Sekunde bzw. von der Sekunde zur Terz) rechnen muss. Vorteilhaft wirkt sich die obige Abwandlung der Terz aber auf den Halbton (Differenz von Quarte und reiner Terz und Oktave zu reiner Septime) sowie die Sexte und Septime aus.

Die so entstandene Tonleiter wird seit der Antike bis in die Neuzeit im Abendland verwendet und tritt bei reiner Vokalmusik u. ä. auch heute noch auf[6]. Die ***Verhältniszahlen*** dieser sog. ***„reinen Stimmung“*** sind:

Tonschritt	großer Ganzton	kleiner Ganzton	Halbton	großer Ganzton	kleiner Ganzton	großer Ganzton	Halbton
Verhältnis	9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15

oder jeweils bezogen auf den Grundton

Intervall	Prime	große Sekunde	reine Terz	(reine) Quarte	(reine) Quinte	reine Sexte	reine Septime	Oktave
Verhältnis	1/1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2/1

Seit Ende des 19. Jhts. ist es üblich die Höhen (Frequenzen) der einzelnen Töne so zu normieren, dass der sog. Kammerton a’ die Frequenz 440 Hz hat. Mit dieser Normierung können wir dann die Tonhöhen (Frequenzen) aller vorkommenden Töne bestimmen. Zunächst berechnen wir die ***Frequenzen der Töne der C-Dur-Tonleiter in reiner Stimmung***.

Ton	c’	d’	e’	f’	g’	a’	h’	c’’
Frequenz	264 Hz	297 Hz	330 Hz	352 Hz	396 Hz	440 Hz	495 Hz	528 Hz

Die Frequenzen der entsprechenden Töne der höheren bzw. tieferen Oktaven entstehen daraus durch Multiplikation mit 2 oder 4 oder 8 etc. bzw. ½ oder ¼ etc.

Will man nun nicht nur von C ausgehend eine solche reine Dur-Tonleiter haben, so muss man weitere Töne einführen, die durch ***Erhöhung*** (gekenn-

[5] Aus Physik und Mathematik wissen wir heute, dass die Überlagerung von Sinusschwingungen mit einfachen Verhältnissen von Schwingungsfrequenzen zu regelmäßigen Schwingungsverläufen führt, die unser Ohr/Gehirn als harmonisch interpretiert.
[6] Seit dem 18. Jht. ist die wohltemperierte Stimmung üblich. Weitere Einzelheiten zur Entwicklung der abendländischen Tonsysteme sowie deren Zusammenhang mit Mathematik und Mathematikunterricht siehe etwa bei Graumann (2007).

zeichnet mit dem Vorzeichen #) oder ***Erniedrigung*** (gekennzeichnet mit dem Vorzeichen ♭) ***der bisherigen Töne*** entstehen[7]. Beginnend mit dem neuen Grundton müssen wie in der oben beschriebenen Tabelle die Schritte

gr. Ganzton – kl. Ganzton – Halbton – gr. Ganzton – kl. Ganzton – gr. Ganzton – Halbton

durchgeführt werden.

Beginnen wir etwa mit dem Ton G, so ergibt sich die *reine G-Dur-Tonleiter* aus den Tönen *g, a, h, c, d, e, fis, g* , wobei sich „Fis" als reine Septime von G aus ergibt (bzw. als gr. Ganzton von E aus oder als Halbton von G aus nach unten)[8]. Die Verhältniszahl (bezogen auf den Grundton c') und die Frequenz dieses neuen Tons erhält man durch Anwenden der entsprechenden Brüche auf die Verhältniszahl von G bzw. dessen Frequenz, wobei wir für das Fis zwischen c' und c'' ggf. noch eine Oktave nach unten springen müssen (was einer Division der entsprechenden Zahlen durch 2 entspricht). Wir erhalten damit für den neuen Ton ***Fis*** (zwischen c' und c'') bezogen auf c' die Verhältniszahl (3/2)·(15/8):2 bzw. ***45/32*** und aus (45/32)·264 die Frequenz ***371,25 Hz***.

Ebenso können wir die Verhältniszahlen und Frequenzen der Töne weiterer Tonleiter berechnen. Üblicherweise wandert man dabei in Quinten nach oben und unten (entsprechend dem sog. Quintenzirkel der Musiktheorie).

Nach der G-Dur-Tonleiter kommt daher die *reine D-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *d, e, fis, g, a, h, cis, d* , wobei ***Cis*** (zwischen c' und c'') sich errechnet zu ***135/128*** bzw. ***278,4375 Hz***. Danach kommt die *A-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *a, h, cis, d, e, fis, gis, a,* wobei ***Gis*** (zwischen c' und c'') sich errechnet zu ***25/16*** bzw. ***412,5 Hz***.

Gehen wir jetzt erst einmal im Quintenzirkel von C aus rückwärts, so stoßen wir auf die *F-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *f, g, a, b, c, d, e, f* , wobei der Ton „***B***" sich als Quarte von F aus nach oben (bzw. Quinte nach unten) ergibt und deshalb errechnet zu ***16/9*** bzw. ***469,3333 Hz***.

Als nächstes folgt die *B-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *b, c, d, es, f, g, a, b,* wobei „Es" (zwischen c' und c'') sich errechnet aus einer Quinte von B nach unten zu ***32/27*** bzw. ***312,8889 Hz***.

---

[7] Die Erhöhung (mit #) wird im deutschsprachigen Raum im Namen des Tones durch Anhängen der Silbe „is" gekennzeichnet. Die Erniedrigung eines Tones (mit ♭) wird im deutschsprachigen Raum durch Anhängen der Silbe „es" gekennzeichnet (Ausnahmen: „as" statt „aes" und „es" statt „ees" sowie „b" statt „hes").

[8] Eigentlich müsste auch a etwas höher sein, nämlich als gr. Ganzton (anstatt kl. Ganzton) von g aus gerechnet. Die Verhältniszahl (bezogen auf c') wäre dann 27/16 anstatt 5/3, was einer „Differenz" von (27/16):(5/3) = 81:80 entspricht. (Dieses Verhältnis ist gleich der „Differenz" von großem und kleinen Ganzton und wird „syntonisches Komma" genannt.) Für unsere Überlegungen spielt dieser Gesichtspunkt zunächst keine Rolle, bietet aber die Möglichkeit einer Vertiefung des Themas.

Eine Quinte weiter herunter kommen wir dann zur *Es-Dur-Tonleiter* mit den Tönen *es, f, g, as, b, c, d, es,* wobei sich das „***As***" aus dem obigen Es mit einer Quarte nach oben errechnet zu ***128/81*** bzw. ***417,185185 Hz***.

Wir können nun „***As***" (128/81 bzw. ≈ 417,2 Hz) mit „***Gis***" (25/16 bzw. 412,5 Hz) vergleichen und feststellen, dass der Ton „As" um 4,7 Hz (bzw. als Verhältniszahl 2048/2025) höher ist als das „Gis", was mit der (in Fußnote 8 angedeuteten) besonderen Rolle von a zu tun hat. Sonst ist in der Regel der „is"-Ton höher als der „es"-Ton, z.B. ist „***Dis***" um 3,9 Hz höher als „***Es***". Die genannten Differenzen betragen etwa ein Fünftel eines Halbtons, was Musiker noch gut unterscheiden können.
Man sieht hiermit, dass es Probleme gibt, wenn man auf Tasteninstrumenten mit den üblichen zwölf Tasten (sieben weiße und fünf schwarze) mehrere Tonleitern mit reiner Stimmung einrichten möchte.
Dieses Problem trat historisch zuerst im Mittelalter auf, als man ab ca. 1000 n. Chr. in Kirchen Orgeln installierte. Man versuchte dann zu Beginn der Neuzeit dieses Problem durch leichte Abweichungen von der reinen Stimmung zu beheben, wobei Verhältnisse aus größeren Zahlen verwendet wurden und erhielt die sog. mitteltönigen Stimmungen. Endgültig gelöst werden konnte das Problem aber erst im 18. Jahrhundert durch Einführung der sog. wohltemperierten Stimmung (mit gleicher Verteilung aller zwölf Halbtöne auf die Oktave), zu der man rechnerisch mit Wurzeln umgehen musste. Darauf können wir hier aber nicht mehr eingehen.

Erwähnt sei allerdings noch, dass man Ende des 19. Jahrhundert zur Beschreibung der Intervalle zu einem logarithmischen Maßstab überging, der so normiert war, dass der wohltemperierte Halbton den Wert 100 erhält. Diese Maßeinheit wird deshalb als „Cent" bezeichnet. Und zwar bildet man dazu den 2er-Logarithmus der Verhältniszahl und multipliziert sie mit 1200. Diese Darstellung von Intervallen bietet einerseits eine gute Anwendung für die Logarithmenrechnung und andererseits ein besseres Verständnis der Intervallgrößen. Der Oktave entspricht z.B. die Zahl 1200 Cent, während die Differenz von Gis zu As dem Wert 19,55 Cent entspricht. Zum Vergleich dazu hat der große Ganzton den Wert 203,9 Cent und das syntonische Komma den Wert 21,5 Cent. Bekannt ist, dass geschulte Musiker Unterschiede bis zu 5 oder 10 Cent wahrnehmen können, was also etwa einem 20tel eines Ganztons entspricht.

Literatur

GRAUMANN, G. (2007). Musikalische Stimmungen im Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In: Der Mathematikunterricht Jg. 53, Heft 1/2, 2007, S. 6 -15.