Mutfried Hartmann/Rainer Loska, Nürnberg

Mathematik ohne Regeln und Formeln?

Schüler klammern sich oft an Regeln und Formeln. Diese scheinen einfach und leicht anwendbar zu sein. Das mag zwar für die einzelnen Regeln und Formeln zutreffen. Für viele Schüler ist es aber ein Problem, zu wissen, welche Regel bei welchem Aufgabentyp auf welche Weise anzuwenden ist. Das seit Jahrhunderten in der Öffentlichkeit vorherrschende Bild von der Mathematik wird von Regeln und Formeln bestimmt, von formalen, abstrakten Notationen. Eine entsprechend lange Unterrichtstradition nährte diese Vorstellung. Überspitzt formuliert wird seit Adam Ries der Rechen- bzw. Mathematikunterricht im Wesentlichen als Training von Regeln und Formeln verstanden. Durch die Praxis eines regelgeleiteten Unterrichts wird den Schülern als "heimlicher Lehrplan" gleichzeitig vermittelt, dass Regeln und Formeln das Wesentliche der Mathematik sind.

Die in den letzten Jahren veränderten Bildungs- und Lernziele begünstigen jedoch eine andere Sicht und erfordern Veränderungen im Mathematikunterricht. Wir meinen, dass eine Reorganisation der Unterrichtsinhalte erfolgen muss und beziehen uns mit unseren Überlegungen und Vorschlägen hier auf die Sekundarstufe 1, insbesondere auf die Hauptschule. Im Mittelpunkt sehen wir die auf Verständnis basierte Sicherung von *Kernideen*, die das Fundament des Wissens bilden, und in großen Teilen das abstrakte Anwenden von Regeln und Formeln ersetzen können. Hier ist zwar ein höherer Aufwand gegenüber isolierten Regelanwendungen erforderlich. Der immer wieder neu aufgenommene Kampf im Dschungel der vielen Regeln würde jedoch wegfallen bzw. vermindert. Durch die Fokussierung auf wenige Kernideen wird letztlich auch eine Reduzierung des Lernstoffs erreicht. Weitergehende Problemstellungen werden auf bekannte Kernideen zurückgeführt, die dadurch implizit auch wiederholt werden.

Die Sicherung der Kernideen selbst beruht auf:

- Konsequente Grundlegung durch die Anschauung
  - Anschauliche Herleitungen werden zu einem eigenen Unterrichtsziel
  - Die Anschauung muss durchgängig - ggf. über Jahre hinweg - aufrecht erhalten werden
- Enge Verzahnung von Handlung, Bild und Notation
  - Begleitung der abstrakten Notation durch geeignete Sprechweisen, die auf die Anschauung referieren
  - Übungen zur Verknüpfung von Notation und Anschauung

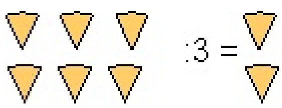
- Training
  - Trainiert wird anstelle der Regeln die Anschauung
  - Verstärkter Einsatz spezieller Übungen, die den Fokus auf möglichst nur einen bestimmten Aspekt der Kernideen legen unter Ausblendung anderer Aspekte ("fokussierende Übungen")
- Vielfältiger Bezug auf zentrale Kernideen, auch über verschiedene Jahrgänge hinweg

Beispiel aus der Bruchrechnung

Der übliche Bruchrechenunterricht zeichnet sich dadurch aus, dass zunächst in Einführungsstunden Rechenregeln anschaulich abgeleitet werden und dann in den Folgestunden in Aufgabenserien angewandt werden. Infolge dieses Vorgehens werden die anschaulichen Vorstellungen, auf deren Basis die Regeln abgeleitet wurden, vollständig durch ein kalkülhaftes Vorgehen der Schüler verdrängt. Sogar einfachste Operationen mit Brüchen – wie etwa $3 \cdot \frac{1}{7}$ – können selbst dann, wenn Bruchmaterialien zur Verfügung stehen, nicht mehr mit einer Handlung in Verbindung gebracht und umgekehrt solche Handlungen nicht als Rechnung dargestellt werden. Dies führt dazu, dass Schüler selbst einfache Sachkontexte im Rahmen der Bruchrechnung oft nicht geeignet modellieren können. Damit wird aber ein wesentliches Bildungsziel der Hauptschule nicht erreicht! Die Erfahrungen gerade auch im Bereich lernschwächerer Schüler zeigen, dass das verstärkte Training von Regeln und ihren Anwendungen auf Kosten der Begriffsbildung kontraproduktiv ist und nicht die notwendige Nachhaltigkeit sichern kann. Kurzfristige Erfolge beim Training isolierter Regeln täuschen darüber hinweg. In der trügerischen Hoffnung, ihre Schüler von scheinbar unnötigen Vorstellungen entlasten und diese durch vermeintlich einfache Regeln ersetzen zu können, muten viele Lehrer den Schülern letztlich eine nicht mehr handhabbare Fülle an abstrakten Regeln zu.

Wir plädieren deshalb auch hier für eine Reorganisation des Stoffes, also eine neue Gewichtung durch die Sicherung von Kernideen. Eine solche ist in der Bruchrechnung vor allem die quasikardinale Vorstellung: Gleiche Bruchstücke werden hinsichtlich ihrer Anzahl betrachtet und man rechnet wie mit natürlichen Zahlen.

Eine Aufgabe wie $\frac{6}{7} : 3$ würde durch Handlungen auf anschaulicher Basis so vorbereitet:

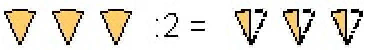


und schließlich wie folgt gelöst: $\frac{6}{7} : 3 = \frac{6 : 3}{7} = \frac{2}{7}$

und nicht, wie es im regelgeleiteten Unterricht verbreitet ist:

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7}:\frac{3}{1}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=\frac{\cancel{6}\cdot 1}{7\cdot\cancel{3}}=\frac{2\cdot 1}{7\cdot 1}=\frac{2}{7}$$

Die Grundlagen für den Aufgabentypus “Bruch durch Zahl” z.B. werden bei Zuhilfenahme des Kreismodells anschaulich gesichert:



$$\frac{3}{7}:2=\frac{3}{7\cdot 2}$$

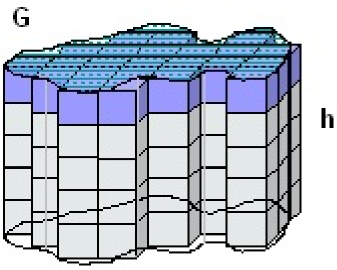
Die vier Rechenoperationen werden von Anfang an nicht voneinander getrennt, sondern gemischt vermittelt und jeweils verbal begleitet. Des weiteren sind fokussierende Übungen einzusetzen, bei denen die Schüler Handlungen bzw. Abbildungen flexibel interpretieren (z.B. ¼ von = ¼ mal = der 4. Teil von = geteilt durch 4 ..) und mit den unterschiedlichen Sprechweisen vertraut werden.

Bei der Multiplikation von Brüchen ist es verführerisch, die doch so einfache Regel “Zähler mal Zähler, Nenner mal Nenner” explizit zu verwenden. Trotzdem halten wir es für wertvoller, auch wenn es ungewohnt ist, hier von den Kernideen auszugehen. Über die Module “Zahl mal Bruch” und “Bruch durch Zahl” gelangen wir auf der Grundlage der Kernidee der Bruchteilbildung *Bruch mal = Bruchteil von* zur Multiplikation zweier Brüche. Dabei werden immer wieder die Kernideen aufgegriffen, damit wiederholt und nicht durch fragwürdige - auch hinsichtlich ihres längerfristigen Erfolgs - Automatisierungen von Regelanwendungen ersetzt. Rechenregeln werden nicht als zu lernende Merksätze notiert; allenfalls werden sie individuell von den Schülern benutzt. Der Rückgriff auf die Kernideen muss auch in den höheren Klassen immer wieder erfolgen.

Beispiel aus der Körperlehre

Häufig ist festzustellen, dass Schüler dann Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Körpern haben, wenn diese keine Prototypen und nicht in der Normallage sind. Wir betrachten Begriffe in ihrem Aspektreichtum generell als zentrale Kernideen, die so im üblichen Unterricht nicht in der nötigen Intensität und im nötigen Umfang behandelt werden. Z.B. sollte der Begriff der geraden (und auch der schiefen) Säule den Schülern geläufig sein. Hierzu sind spezielle Übungen, die wir als *fokussierende Übungen* bezeichnen, einzusetzen. Bei solchen Übungen sollen sie ausschließlich trainieren, Modelle bzw. Abbildungen von Säulen in verschiedenen Lagen, in unterschiedlichen, vor allem ungewöhnlichen Proportionen zu identifizieren, damit

sie nicht nur Prototypen erkennen. Bei weiteren fokussierenden Übungen geht es z.B. ausschließlich darum, die für die Berechnung wichtigen Bestimmungsstücke Grundfläche und Höhe an Körpermodellen und auf Abbildungen herauszufinden. Erst, wenn ein aspektreiches Verständnis des Begriffs der geraden Säule gesichert, das mentale Modell genügend ausgebildet ist, hat es Sinn, bestimmte Operationen - z.B. die Berechnung der Volumina und Oberflächen von Körpern - auszuführen. Wenn die Schüler noch keine klar ausgebildeten Begriffe und Vorstellungen haben, besitzen solche weitergehende Übungen, die auf ihnen aufbauen, keinen Bildungswert.
Als wichtigste Kernidee für die Bestimmung des Volumens eines Körpers ist das Auslegen des Körpers mit Einheitswürfeln zu sehen, ganz in Analogie zum Flächeninhalt als Auslegen mit Einheitsquadraten. Die Vorstellung des Auslegens soll bereits in der Grundschule ausgebildet und in späteren Jahren immer wieder aufgegriffen werden. Dasselbe gilt auch für die weitere Kernidee des geschickten Zählens. Beide Ideen bilden die Grundlage dafür, dass sich das Volumen gerader Säulen als Produkt aus der Anzahl der Würfel, welche die Grundschicht bilden, und der Anzahl der Schichten, aus denen der Körper besteht, bestimmen lassen lässt.
Das geeignete Material hierzu sind Würfelbauten, mit denen propädeutisch in der Grundschule gearbeitet wird, die aber auch in der Sekundarstufe wieder verwendet werden sollen.



Um das Verständnis davon zu sichern, dass sich das Volumen einer geraden Säule als Vielfaches einer Grundschicht ergibt, sollen auch ungewöhnliche Säulenformen verwendet werden, bei denen sich das Volumen zwar nur näherungsweise, jedoch auf die gleiche Weise bestimmen lässt. Die Schüler sollten diese Sichtweise immer präsent haben bzw. jederzeit rekonstruieren können. Beim Arbeiten mit normierten Materialien sollen sie auch Größenvorstellungen von zentralen Stützgrößen (mm^3, cm^3, dm^3, ...) gewinnen, um mit ihrer Hilfe Abschätzungen der Volumina realer Körper vornehmen zu können. Anstatt Umrechnungszahlen mechanisch zu verwenden, sollen sie auf entsprechende Vorstellungen zurückgreifen können. Sie sollen z.B. rekonstruieren können, wie viele Würfel der Größe von 1 cm^3 in einen Würfel der Größe von 1dm^3 passen.

An den Beispielen konnte nur angedeutet werden, auf welche Weise eine Reorganisation des Lernstoffes anhand von Kernideen erfolgen müsste. Es bleibt die Aufgabe, den Stoffkanon unter diesen Aspekten neu zu sichten, um ihn dann für den Unterricht nach und nach neu aufzubauen.