

Mathias HATTERMANN, Gießen

## **Der Zugmodus in dreidimensionalen dynamischen Geometriesystemen**

Dynamische Geometriesysteme (DGS) im zweidimensionalen Raum sind eines der am Besten erforschten Gebiete der Mathematikdidaktik (Laborde 2006). DGS sind durch drei fundamentale Eigenschaften, den Zugmodus, die Ortslinien-/Ortsflächenfunktion und die Makrokonstruktionsmöglichkeit charakterisiert. Sie sind in der mathematikdidaktischen Community akzeptiert und vor allem Euklid DynaGeo und Cinderella fördern bereits den Mathematikunterricht in deutschen Klassenzimmern. Seit einiger Zeit sind zwei dreidimensionale Systeme, Cabri 3D und Archimedes Geo3D auf dem Markt, welche von Jean-Marie Laborde bzw. Andreas Goebel entwickelt wurden. Der Zugmodus, der Dynamik in die bisher starre Geometrie bringt, stellt die bedeutendste Funktion in DGS-Systemen dar. Aus diesem Grund wurde im Juli 2007 an der JLU-Gießen eine Studie durchgeführt, um erste Einblicke in das Nutzerverhalten von Studierenden in 3D-Umgebungen, zu erhalten.

### **Study Design**

Warum können Ergebnisse, welche bspw. den Einsatz des Zugmodus in 2D-Umgebungen betreffen, nicht ohne weitere Untersuchungen in den 3D-Raum übertragen werden? Zu dieser Frage ist zu beachten, dass dem Anwender in 2D-Umgebungen mit Hilfe seines Eingabemediums, der Maus oder des Touchpads, eine volle Variabilität zur Verfügung steht, welche in 3D-Umgebungen nur noch eingeschränkt vorhanden ist. Aufgrund der Zweidimensionalität der Tischplatte, auf der die Maus bewegt wird, muss eine bestimmte Taste im jeweiligen Programm gedrückt werden, um auch Punkte im Raum zu erreichen, die außerhalb der Ebene liegen, in der zunächst gezogen werden konnte.

An der Studie nahmen 15 Studierende des Lehramtsstudiengangs für Real-schulen teil, welche sich zwischen dem fünften und siebten Semester befanden. Die Probanden verfügten über Vorkenntnisse in 2D-DGS, da sie alle die Veranstaltung „Computer im Mathematikunterricht“ besuchten, in der sie u.a. mit Euklid DynaGeo arbeiteten. Im Verlauf einer Sitzung des Seminars „Kegelschnitte mit DGS“ arbeiteten die Probanden mit Cabri 3D, um die verschiedenen nichtentarteten Kegelschnittkurven auf experimentellem Wege, als Schnitt eines Kegels mit einer Ebene, zu erkunden. Mit Archimedes Geo3D hatten die Probanden keine Erfahrung. Die Studierenden waren in sieben Gruppen eingeteilt, wobei sechs Gruppen jeweils aus zwei Teilnehmern bestanden und die siebte Gruppe aus drei Teilnehmern zu-

sammengesetzt war. Vier Gruppen arbeiteten mit Cabri 3D, während den übrigen Gruppen Archimedes Geo3D zur Problemlösung zur Verfügung stand. Die Gruppen arbeiteten räumlich getrennt voneinander, wobei die Handlungen der Studierenden auf dem Bildschirm mit Hilfe der screen-recording software „Camtasia“ aufgenommen wurden und zudem eine Webcam installiert war, welche Bild und Tonaufnahmen von den Studierenden zur Analyse bereitstellte.

### **Forschungsfragen**

Das Hauptinteresse lag zunächst darin, Studierende bei einem Lösungsprozess in 3D Systemen zu beobachten und dabei den Gebrauch des Zugmodus im Blick zu behalten. Es stellten sich folgende Fragen: Benutzen Studierende die Softwareumgebung überhaupt, wenn Sie Papier und Bleistift und reale Flächenmodelle zur Verfügung haben, die ebenso zur Lösung des Problems genutzt werden können? Benutzen die Probanden den Zugmodus und wenn ja in welcher Weise?

### **Aufgaben**

Aufgabe eins bestand darin, einen Würfel zu konstruieren, ohne die in den Programmen zur Verfügung stehenden Makros zu benutzen. Die Aufgabe wurde gestellt, damit sich die Probanden anhand einer einfachen Aufgabe mit der neuen Softwareumgebung vertraut machen sollten. Auf die Ergebnisse von Aufgabe eins wird deshalb nicht weiter eingegangen. Die interessantere Aufgabe 2 hatte den folgenden Wortlaut: „Ein Kommilitone stellt folgende Thesen auf: „ Man kann einen Würfel derart mit einer Ebene schneiden, dass als Schnittfigur von Würfel und Ebene a) ein gleichschenkliges Dreieck, b) ein gleichseitiges Dreieck, c) ein rechtwinklig, gleichschenkliges Dreieck und d) ein regelmäßiges Sechseck entsteht.“ Konstruieren Sie nun mit Hilfe der bereits vorhandenen Funktion „Würfel“ einen Würfel, überprüfen Sie experimentell die obigen Aussagen und begründen Sie ihre gefundenen Ergebnisse.“

Bei dieser Aufgabe interessante Fragen waren die folgenden: Versuchen die Probanden sich die Schnittfiguren vorzustellen ohne die Hilfe des Computers oder benutzen sie vielleicht Papier und Bleistift zur Lösungsfindung? Benutzen Sie den Zugmodus bei der Bearbeitung der Aufgabe und wenn ja in welcher Weise? Es existieren verschiedene Möglichkeiten zur Festlegung der Schnittebene. Durch die Definition der Ebene mit Hilfe dreier beliebiger Punkte im Raum ist bspw. ein kontrolliertes Ziehen der Ebene nicht möglich, demgegenüber besteht die Möglichkeit, drei geeignete bewegliche Punkte auf den Würfelkanten zur Definition der Ebene zu benutzen, um einen kontrollierten Zugprozess zu ermöglichen.

## Ergebnisse

Zunächst ist zu erwähnen, dass alle Gruppen sowohl das gleichschenklige als auch das gleichseitige Dreieck konstruieren konnten. Dagegen bereiteten den Studierenden das gleichschenklige-rechtwinklige Dreieck (welches als Schnitt nicht existiert) und das gleichmäßige Sechseck (welches existiert) mehr Probleme. Zwei Gruppen äußerten die Vermutung, dass das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck nicht existiert, sie konnten jedoch diese Behauptung nicht begründen. Einer weiteren Gruppe gelang es, die Nichtexistenz zu begründen, während eine Gruppe diese Frage nicht beantwortete. Drei Gruppen behaupteten, dass das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck existiert, wobei zwei der Gruppen die Messfunktion für Winkel von Cabri 3D in Anspruch nahmen. Cabri zeigt aufgrund der mathematischen Modellierung einen Winkel von 90 Grad an, obwohl dieser kleiner ist. Hierbei entstanden interessante Diskussionen, am Ende gewann jedoch die Autorität des Computers und das gleichseitig-rechtwinklige Dreieck wurde als existent angesehen. Weiterhin fanden drei der Gruppen das regelmäßige Sechseck.

Ein erwähnenswertes Ergebnis betrifft die Nutzung des realen Flächenmodells des Würfels, welches den Probanden zur Verfügung stand. Es ist eindeutig festzustellen, dass die Nutzung des Realmodells die Nutzung der Softwareumgebung überwiegt. Darüber hinaus benutzten die Probanden die „alte Strategie“, indem sie versuchten sich die Schnittfiguren anhand des Realmodells und eines Blatt Papiers, welches die Schnittebene repräsentierte, vorzustellen. In diesem Fall diente die Software nur zur Validierung der Vermutungen, welche zuvor am Realmodell generiert wurden. Zur Überprüfung wurde eine Ebene durch drei feste Punkte definiert und die Schnittfigur exploriert. Teilweise benutzten die Studierenden auch die Bildschirmfigur als „Realmodell“, anstatt in der Softwareumgebung zu arbeiten. Hierbei kam es vor, dass die Probanden mit einem Blatt Papier vor dem Bildschirm hantierten, um sich Schnittfiguren vorzustellen. Weiterhin ist zu bemerken, dass die Studierenden Probleme bei der Verwendung des Zugmodus hatten, es konnte anhand der Aufzeichnungen nicht geklärt werden, ob der Zugmodus bereits in 2D-Umgebungen nicht durchschaut wurde oder ob die Probanden nicht in der Lage waren, die bereits gemachten Erfahrungen auf den 3D-Raum zu übertragen. So wurden bspw. von einer Gruppe viele Punkte auf den Kanten konstruiert und eine Ebene durch drei willkürlich gewählte Punkte definiert. Anschließend wurde die Ebene gelöscht und drei andere Punkte zur Definition der nächsten Ebene herangezogen. Einige Zitate aus den Aufzeichnungen belegen weitere Schwierigkeiten: „Ich weiß nicht, ich habe nicht genügend Vorstellungskraft, um die Aufgabe zu

lösen.“, „Wir können die Ebene nicht ziehen, da wir feste Punkte zur Definition der Ebene brauchen.“, „Gibt es eine Funktion, mit der man eine Ebene ziehen kann?“. Das erste Zitat belegt die Tatsache, dass der Proband zur Lösung des Problems nur die Möglichkeit des Vorstellens der Schnittfigur sieht und ihm die Möglichkeiten der Software, die ihm beim Lösen behilflich sein könnten, nicht bewusst sind. Die Zitate zeigen, dass das „Instrument“ des Zugmodus zur sinnvollen Nutzung nicht ausreichend verstanden wurde.

### **Zusammenfassung**

Es wurde gezeigt, dass Studierende - trotz des Vorhandenseins von Vorwissen in 2D-Systemen - den Zugmodus ohne Instruktion nur in Ausnahmefällen benutzen. Dieses Resultat ist mit den Ergebnissen von Rolet (1996) und Sinclair (2003) vergleichbar. Weiterhin ist die Frage zu klären, warum Studierende das Flächenmodell des Würfels zur Problemlösung präferieren. Nach der Analyse des vorhandenen Datenmaterials kann man folgende Hypothese aufstellen: Aufgaben, die den Probanden leicht fallen, werden im Kopf gelöst und in der Computerumgebung mit Hilfe einer fest definierten Ebene verifiziert. Für die Probanden schwierigere Aufgaben werden am realen Flächenmodell außerhalb der Computerumgebung diskutiert. Somit gilt es in weiteren Untersuchungen zu klären, in welchem Maß die Probanden geschult werden müssen, um die Vorteile der Computersoftware zu erkennen und kompetent mit dem Zugmodus zu operieren.

### **Literatur**

- Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K., & Strässer, R. (2006). Teaching and Learning Geometry with Technology. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 275-304). Rotterdam: Sense.
- Rolet, C. (1996). *Dessin et figure en géométrie: analyse et conceptions de future enseignants dans le contexte Cabri-géomètre*. (unpublished doctoral dissertation, University of Lyon1). Lyon, France.
- Schumann, H. (2007). Schulgeometrie im virtuellen Handlungsraum. Ein Lehr- und Lernbuch der interaktiven Raumgeometrie mit Cabri 3D. Hildesheim, Berlin: Franzbecker.
- Sinclair, M. (2003). Some implications of the results of a case study for the design of pre-constructed dynamic geometry sketches and accompanying materials. *Educational Studies in Mathematics*, 52(3), 289-317.