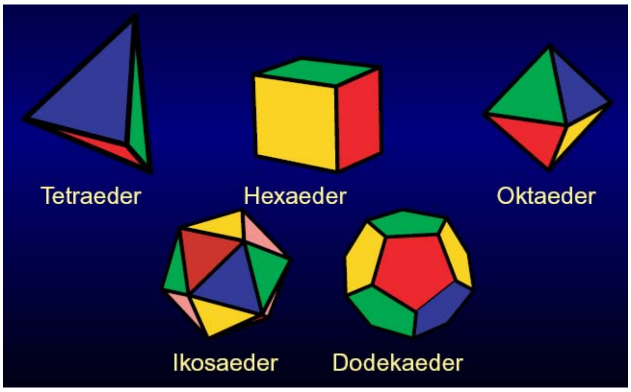
Herbert HENNING, Magdeburg

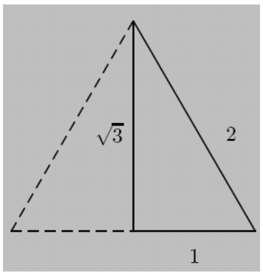
Lauter schöne Körper - Entdeckungen bei Platonischen Körpern

Würfel, Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Dodekaeder sind als Platonische Körper in die Kulturgeschichte der Mathematik eingegangen und stehen für Erde, Feuer, Wasser, Luft und „Gottes Welt“.



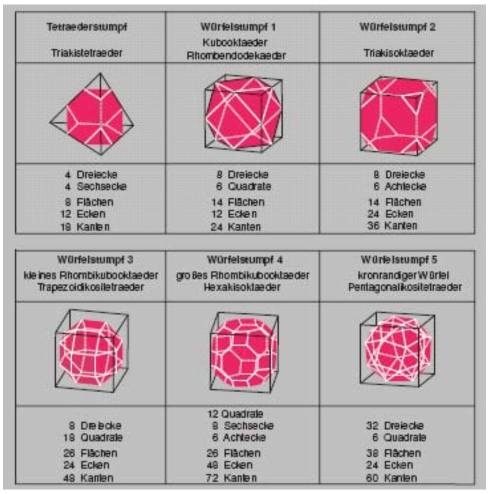
1. Historische Betrachtung der Platonischen Körper

Die erste Definition der Platonischen Körper geht auf Platon zurück. Im Dialog „Timaios“ beschreibt er am Beispiel des Tetraeders den Körper zur Umkugel. Er versteht unter einem regelmäßigen Körper „einen festen Körper, vermittels dessen die ganze (um ihn beschriebene) Kugel in gleiche und ähnliche Teile zerlegbar ist“. Plato konstruiert die Platonischen Körper mittels Urdreiecken



und bietet zu jeden Körper eine entsprechende Konstruktionsanleitung an.

Durch Abschneiden von Ecken bzw. Kanten entstehen aus den Platonischen Körpern die Archimedischen Körper



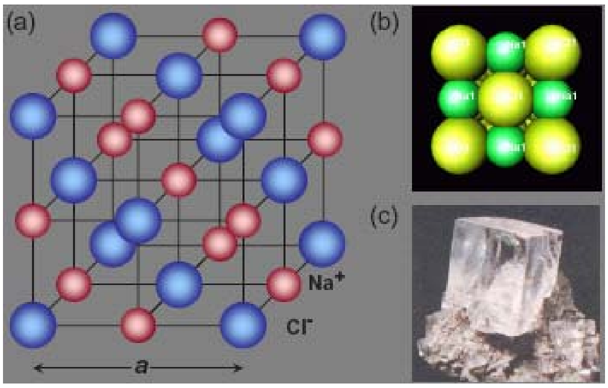
2. Mathematisches zu Platonische Körper

a: Kantenlänge n: Anzahl der Seiten einer Begrenzungsfläche
m: Anzahl der Kanten einer körperlichen Ecke
e: Anzahl der Ecken des Polyeders
f: Anzahl der Seitenfächen
k: Anzahl aller Kanten

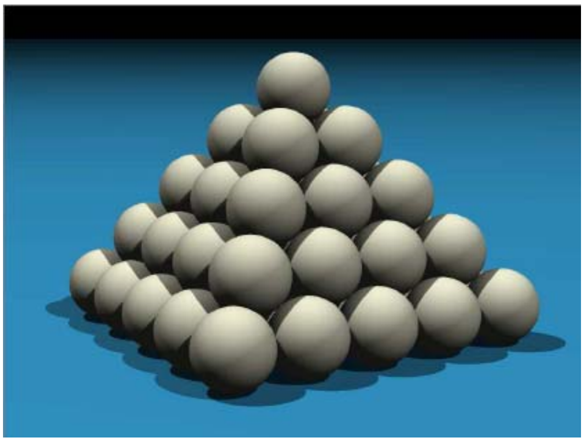
	n	m	e	f	k	Oberfläche	Volumen
Tetraeder	3	3	4	4	6	$a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{12}\sqrt{3}$
Hexaeder	4	3	8	6	12	$6a^2$	a^3
Oktaeder	3	4	6	8	12	$2a^2\sqrt{3}$	$\frac{a^3}{3}\sqrt{2}$
Dodekaeder	5	3	20	12	30	$3a^2\sqrt{5\,(5+2\sqrt{5})}$	$\frac{a^3}{4}\,(15+7\sqrt{5})$
Ikosaeder	3	5	12	20	30	$5a^2\sqrt{3}$	$\frac{5}{12}a^3\,(3+\sqrt{5})$

3. Kristalle und Packungen

Die regulären Körper (bis auf Dodekaeder und Ikosaeder) tauchen in vielfältiger Weise als Formen in der belebten Natur auf, insbesondere in der Kristallographie aber auch bei Packungen von Kugeln.



In diesem Zusammenhang bieten sich die Behandlung von Gitterpackungen an. Im Folgenden ist eine fcc-Packung dargestellt.



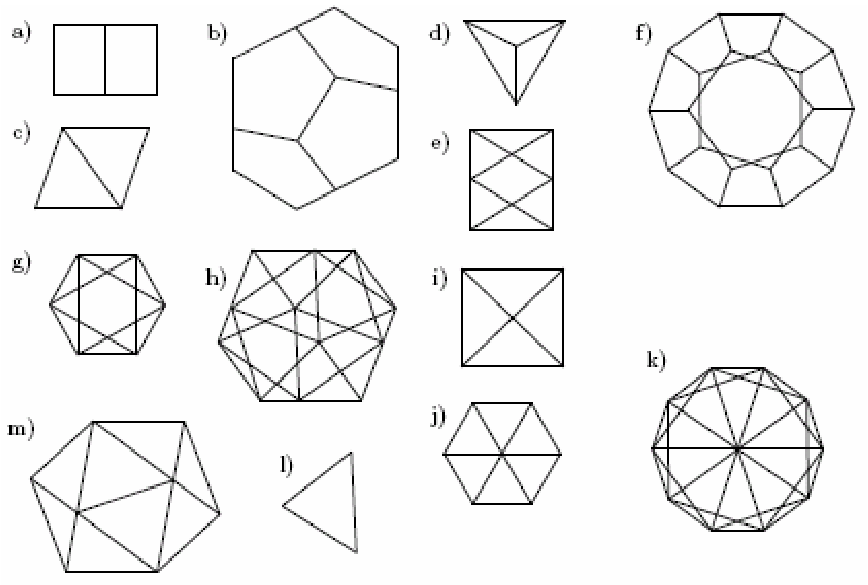
Im Schulunterricht (Klasse 8) bietet sich die Behandlung dieser Thematik durch folgende Aufgabe an.

Wie viele vollständige Konfettikreise lassen sich mit einem handelsüblichen Locher aus einem DIN A-4 Blatt höchstens stanzen?

4. Platonische Körper im Schulunterricht

In der Sekundarstufe I bietet sich die Behandlung der Platonischen Körper an, um Räumliches Vorstellungsvermögen zu fördern. Im Folgenden sind einzelne Aufgaben dargestellt.

Die nachstehenden Bilder zeigen verschiedene Ansichten von Platonischen Körpern als Drahtmodelle. Zunächst sollen die Schüler diese benennen und die Projektionsrichtung beschreiben. Welche der Kanten und Winkel sind in wahrer Größe dargestellt?



Zur Festigung des Begriffes regelmäßiges (konvexes) Polyeder kann die folgende Aufgabe gestellt werden

1. *Sicherlich kennst du verschiedene regelmäßige Vielecke, deren Seitenflächen eines regelmäßigen Polyeders sein könnten. Gib alle an!*
2. *Untersuche, wie viele Vielecke an einer Polyederecke mindestens zusammenstoßen und wie viele es höchstens sind!*
3. *Kann man aus (1.) und (2.) eine Schlussfolgerung ziehen? Wenn ja, gib diese an, ansonsten begründe, warum nicht!*

Ausführliche Darstellungen u. a. zu Platonischen Körpern in der Astronomie und Kunst (Albrecht Dürer, Salvador Dali, Cornelis M. Escher) sowie Interessantes zum „Fußball als Polytop" findet man unter

http://www.math.uni-magdeburg.de/private/henning