

Andrea HOFFKAMP, Technische Universität Berlin

Wie kann man mit dynamischer Geometrie Software funktionales Denken fördern?

Funktionales Denken – Was ist das und was fällt daran so schwer?

Die Bezeichnung *funktionales Denken* taucht das erste Mal explizit in der Meraner Reform (1905) auf. Gemeint war eine gebietsübergreifende Denkgewohnheit, die den gesamten Mathematikunterricht betreffen sollte, nämlich das Denken in Variationen und funktionalen Abhängigkeiten und zwar über das Thema Funktionen im Algebraunterricht hinaus. Die *Erziehung zum funktionalen Denken* wurde als eine Sonderaufgabe herausgestellt. Nachdem der Begriff funktionales Denken in den 60ern und 70ern aus der Mode kam, gewinnt er seit den 80ern wieder an Bedeutung. Vollrath (1989) beschreibt funktionales Denken als "eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist." Damit bindet er funktionales Denken eng an den Funktionsbegriff. In den Bildungsstandards ist funktionales Denken als *Leitidee Funktionaler Zusammenhang* verankert.

Funktionen bzw. funktionales Denken sind komplexe Begriffe. Zum einen gibt es verschiedene Darstellungsmöglichkeiten funktionaler Abhängigkeiten, wie bildliche oder sprachliche Beschreibung, Tabelle, Graph, algebraischer Ausdruck. Zum anderen kann man funktionale Abhängigkeiten verschieden betrachten, nämlich unter dem Zuordnungsaspekt (horizontaler, punktwiser Zusammenhang), dem Kovariationsaspekt (vertikaler, dynamischer Zusammenhang) und Funktion als Ganzes/als Objekt. Viele Studien haben gezeigt, dass der Kovariationsaspekt am meisten Schwierigkeiten bereitet. Dies zeigt sich z.B. beim Lesen und Interpretieren von Graphen und von Situationen, in denen funktionale Zusammenhänge erkannt werden sollen. Oftmals werden Funktionsgraphen als fotografische Bilder der Realsituationen interpretiert. Eine weitere Hauptschwierigkeit ist die Übersetzung zwischen den verschiedenen Darstellungsformen.

Funktionales Denken – Warum ist der Einsatz von dynamischer Geometrie Software sinnvoll?

Dynamische Geometrie Software (DGS) ermöglicht die Herstellung von Experimentierflächen, in denen mathematische Objekte visuell dynamisiert werden (Zugmodus) und somit der Kovariationsaspekt funktionaler Abhängigkeiten sichtbar wird. Darstellungsformen von Funktionen können interaktiv verknüpft und damit strukturelles Begriffsverständnis gefördert werden. Denkprozesse lassen sich auslagern und Operationen, die mental nicht vollzogen werden können, lassen sich extern darstellen. Dadurch

"wird der Kopf frei" für weitere Überlegungen und Ansätze. Außerdem kann DGS Raum für eigenständiges Arbeiten und damit für individuelle Gedankengänge und persönliches Arbeitstempo lassen.

Erprobung zweier digitaler Lerneinheiten in Jahrgangsstufe 10

Es wurden zwei digitale Lerneinheiten entwickelt und in Jahrgangsstufe 10 erprobt. Dabei wurde den Fragen nachgegangen, ob und wie es möglich ist den dynamischen Aspekt funktionalen Denkens sichtbar zu machen und zu fördern. Dazu wurde jeweils eine bildliche Beschreibung funktionaler Zusammenhänge mit der Darstellungsform Graph verknüpft und die Möglichkeit zum Experimentieren gegeben. Die Darstellungsform Graph wurde gewählt, weil sie sich besonders auf den Kovariationsaspekt bezieht. Zur Erprobung stand je eine Doppelstunde in zwei 10. Klassen (E-Kurse) einer Gesamtschule in Berlin zur Verfügung. Beide Lerngruppen haben das Thema Funktionen längere Zeit nicht im Unterricht behandelt. Auch ein Computereinsatz in Form von digitalen Lerneinheiten war den Schülern fremd. Die Lerneinheiten bestehen aus Internetseiten mit integrierten Java-Applets, die mit der DGS Cinderella <http://cinderella.de> erstellt wurden und unter www.math.tu-berlin.de/~hoffkamp verfügbar sind. Die Schülerinnen und Schüler benötigten kein Spezialwissen über die Software und konnten direkt mit Hilfe der Applets die Arbeitsaufträge bearbeiten.

Lerneinheit Dreiecksfläche. Die Testgruppe bestand aus 19 Schülerinnen und Schülern einer eher lernschwachen Gruppe. Die Schülerinnen und Schüler erhielten einen Arbeitsbogen mit der Internetadresse der Lerneinheit und den Aufgabenstellungen. Sie bearbeiteten die Aufgaben mit Hilfe der Lerneinheit (Abb. 1) in Zweiergruppen am Computer. Im Anschluss an die gemeinsame Besprechung der Lösungen wurde ein schriftlicher Nachtest durchgeführt und schließlich ein Fragebogen zum Thema "Arbeiten mit dem Computer" ausgefüllt.

Lerneinheit Trapez. Diese Lerneinheit wurde bereits das zweite Mal in nun überarbeiteter Version mit 23 Schülerinnen und Schülern erprobt. Die Trapezaufgabe ist nach einem Aufgabenvorschlag aus den Bildungsstandards entstanden. Hier geht es um das Erkennen und Beschreiben funktionaler Abhängigkeiten in einer Situation, deren graphischer Darstellung, der Erkennung wichtiger Funktionseigenschaften (Extremwert) und zusätzlich um das Auffinden eines Funktionsterms. Die Fragestellung ist hier erweitert: Wie muss der Einsatz von DGS gestaltet sein, damit er bei komplexeren Aufgaben, in denen es sowohl um das Lesen von und Übersetzen zwischen verschiedenen Darstellungsformen als auch um verschiedene Sichtweisen auf funktionale Abhängigkeiten geht,

förderlich ist? Die Lerneinheit ist umfassender und beinhaltet mehrere Hilfen und Hinweise, z.B. gibt es Wiederholungsteile zum Thema Quadratische Funktionen oder Geradengleichungen. Nach der computerunterstützten Bearbeitung des Arbeitsbogens zur Lerneinheit wurden die Ergebnisse im Klassenverband besprochen und schließlich ein Fragebogen zum Thema "Arbeiten mit dem Computer" ausgefüllt. Alle Unterrichtsmaterialien findet man auf der dem Tagungsband beiliegenden CD bzw. unter der oben angegebenen Internetadresse.

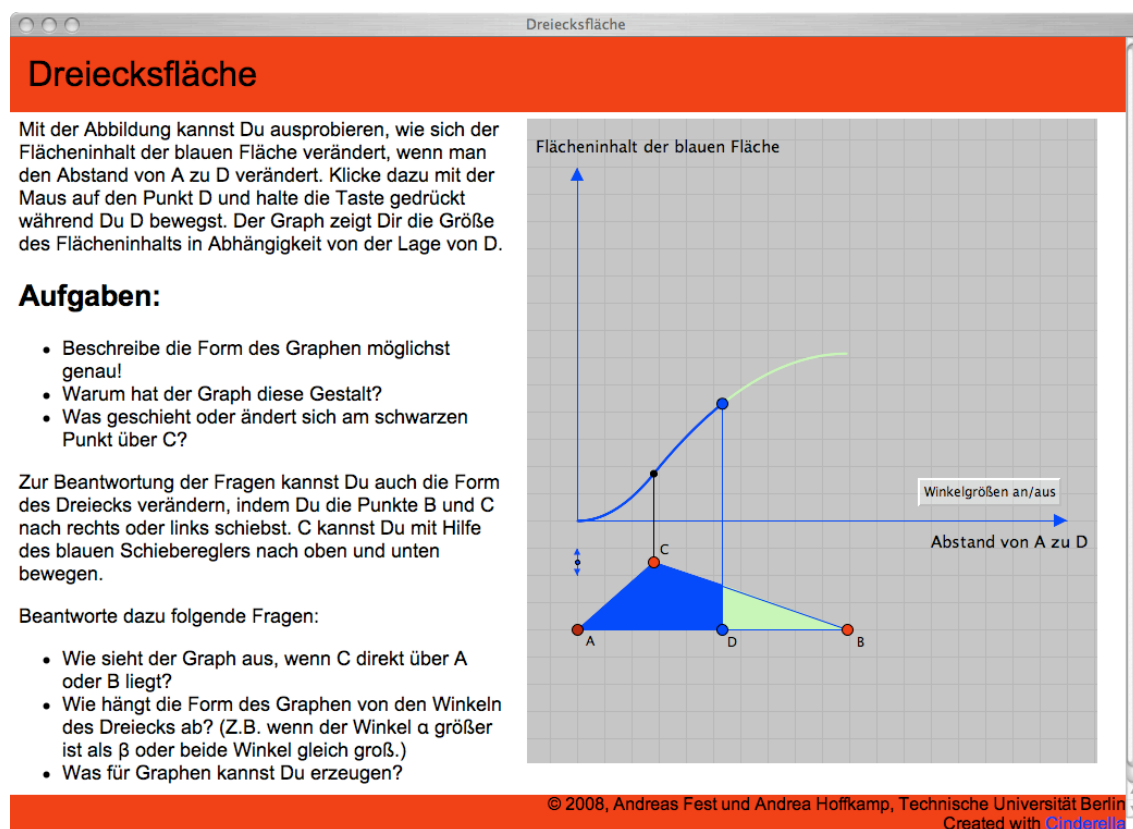


Abb 1: Bewegung des Punktes D macht den Kovariationsaspekt sichtbar. Bewegung der Punkte B und C erzeugt neue Situationen und dazugehörige Flächeninhaltsgraphen (Metavariation).

Ergebnisse. Die Ergebnisse beruhen auf Schülerbeobachtungen, Nachttest und Fragebögen. Sie bestätigen die eingangs aufgestellten Vermutungen zum DGS-Einsatz und sind so zu verstehen, dass sie weitere Forschungsrichtungen aufzeigen und in ausführlicheren Studien überprüft werden müssen.

Computerunterstütztes Arbeiten allgemein: Die Arbeit mit den Lerneinheiten wirkte sich sehr positiv auf die *Motivation* der Schülerinnen und Schüler aus. Zum einen hatte es den "Bonus des Neuen", aber zum anderen schätzten die Schülerinnen und Schüler das *selbstständige und individuelle Arbeiten* in einem *selbstbestimmten Arbeitstempo*. Dies

erlaubte auch eine *bessere Binnendifferenzierung*: Lernschwache Schülerinnen und Schüler benötigten zwar oft die Hilfe seitens der Lehrperson, konnten aber dennoch in ihrem Rahmen und ihrem Tempo selbstständig arbeiten (und hatten somit das Gefühl auch etwas alleine geschafft zu haben), während lernstarke Schülerinnen und Schüler die Aufgaben teilweise komplett alleine bearbeiteten. Allgemein kam es zu wenig Frustrationserlebnissen: Fehler konnten selbst erkannt und korrigiert werden. Durch das *experimentelle Arbeiten* war eine größere *Variation der Gedankengänge* möglich. Außerdem wurde positiv hervorgehoben, dass der Computer Tätigkeiten wie Zeichnen, Rechnen u.ä. übernimmt und dadurch mehr Zeit für die eigentliche Problemstellung blieb.

Lerneinheiten und funktionales Denken: Durch Dynamisieren und Experimentieren werden funktionale Zusammenhänge und insbesondere der Kovariationsaspekt sichtbar und erkannt. Die dynamische Verknüpfung von Situation und Graph fördert Interpretations- und Leseleistungen. Insbesondere ist hier die Möglichkeit der *Metavariation* hervorzuheben, nämlich, dass nicht nur innerhalb der Situation Veränderungen untersucht werden können, sondern auch neue Situationen hergestellt und die Auswirkungen auf den Graphen beobachtet werden können. Ein Thema, auf das die Lerngruppe komplett unvorbereitet war, war in kurzer Zeit so einföhrbar, dass eine solide Basis geschaffen war, auf der man weiterarbeiten kann. Die Lerneinheiten müssen so gestaltet sein, dass sie genügend Raum für Fehler lassen und die Möglichkeit bieten produktiv mit den Fehlern durch weiteres Experimentieren umzugehen.

Literatur

Hoffkamp, A. *Funktionales Denken fördern durch den Einsatz von Dynamischer Geometrie Software*. Erscheint in: Aufgaben mit Technologieinsatz, Bericht über die 25. Arbeitstagung des Arbeitskreises "Mathematikunterricht und Informatik" in der GDM vom 28.-30.9.2007 in Soest. Franzbecker Verlag.

Krüger, K. Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts - das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte*, 47:221-241, 2000.

Kultusministerkonferenz. *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss*. Luchterhand, Darmstadt, 2003.

Malle, G. *Didaktische Probleme der elementaren Algebra*. Vieweg, 1993

Müller-Philipp, S. *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. Waxmann, 1994.

Schlöglhofer, F. Vom Foto-Graph zum Funktions-Graph. *mathematik lehren*, 103:16-17, 2000.

Vollrath, H.-J. Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik*, 10(1):3-37, 1989.