Manfred KRONFELLNER, Wien

# Begriffsbildung und Begriffsvorstellung

Frage: Was versteht man unter einer (lokalen) Maximumstelle?

Häufige Antwort (auch bei Studenten): f ‘(x)=0 ….

Dies ist ein besonders drastisches Indiz für die alt bekannte Tatsache, dass der algorithmische Aspekt die begriffliche Seite der Mathematik im Unterricht überwuchert. Um letztere mehr ins Rampenlicht zu rücken wurden in den letzten Jahrzehnten mehrere Ansätze entwickelt um durch Gegenüberstellung dieser Aspekte den unterrepräsentierten deutlicher ins Bewusstsein zu rücken:

- Instrumental understanding – relational understanding (SKEMP 1986)
- Procedural knowledge – conceptual knowledge (HIEBERT 1986, HAAPASALO/KADIJEVICH 2000)
- Process - object (“as two sides of the same coin”; SFARD 1991)
- Algorithmic mathematics – dialectic mathematics (SIU 2002)

Um auch innerhalb des begrifflichen Aspekts den Prozesscharakter von Begriffsentwicklung und Begriffsbildung zu betonen stellen einige Autoren der eigentlichen Definition „Vorstufen“ (häufig auch unter Verweis auf die historische Entwicklung) voran: „procept“ (TALL), „conception“ (MORENO 1992; u. a.)

Auch das Konzept der Grundvorstellungen (BENDER 1991, vom HOFE 1995) bzw. „conception image“ (VINNER 1976) zielen in eine ähnliche Richtung.

Dennoch ist das Wissen über Definitionen zentraler mathematischer Begriffe nach wie vor dürftig.

> *„Less gifted persons usually did not know the correct definitions…. Examinees could correctly state an ‘official’ definition but would not notice a contradiction between this definition and his or her other, more ‘private’ conceptions and, worse, would not try to compare the two parts of his or her knowledge.“* (PRZENIOSLO 2006, S. 127)

SchülerInnen arbeiten – nach DÖRFLER (1991) – nicht mit Definitionen sondern mit „prototypischen Repräsentanten“. Nicht selten bleibt aber nur ein dominierender Repräsentant im Gedächtnis der SchülerInnen, etwa:

ein Spezialfall: z. B.: $\sin\alpha = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}$

bzw. $a^n = a \cdot a \cdot ... \cdot a$

ein Algorithmus: *f'(x)=0* (Siehe oben!)

eine Deutung: *f'(x)* = Tangentensteigung

bzw: $\int_a^b f(x)dx$ = Flächeninhalt

usw.

Das sind zwar wichtige Prototypen oder Grundvorstellungen, aber wenn das die einzigen Assoziationen sind, ist das mir zu wenig.

Sind Definitionen notwendig? Können/sollen/müssen/dürfen wir sie von SchülerInnen verlangen? Brauchen wir etwa eine allgemeine Funktionsdefinition oder genügt es nicht auch lineare Funktionen, Polynomfunktionen, Exponentialfunktionen, trigonometrische Funktionen, … zu definieren? (Schließlich definieren wir auch natürliche Zahlen, negative Zahlen, rationale Zahlen, reelle Zahlen, komplexe Zahlen, aber wir geben keine Definition von „Zahl"!) Oder brauchen wir eine Definition von Folge als Funktion mit Definitionsmenge ℕ? Brauchen wir eine Definition von „Dreieck" als „Durchschnitt eines Winkelfeldes mit einem Parallelstreifen", die in Zeiten der New Math Kindern aufoktroyiert wurde?

Es geht – meiner Meinung nach – nicht nur um die Begriffe selbst, sondern vielmehr um ein adäquates Bild von Mathematik.

> *„Beim Lernen von Begriffen kann der Schüler auch etwas über Begriffsbildung lernen. Es ist jedoch hochgradig illusionär, wenn man meint, dass sich dieses Lernen von selbst ereignet."* (VOLLRATH 1987)

> *„Does the high school student or the college freshman have any idea about the structure of mathematics? The first reaction to this question might be: why should he? Usually nobody tells this student explicitly anything about the structure of mathematics …* (VINNER 1976)

Das Erlernen von abstrakten Begriffen beinhaltet für den Lernenden so viele potentielle Schwierigkeiten, *"that the organization of the learning process undoubtly requires taking special steps."* (PRZENIOSLO 2006)

**Ein paar Vorschläge:**

(i) Man muss sich - als Lehrender wie als Lernender - für den Prozess des Begriffserwerbs Zeit nehmen.

(ii) Man muss diesen Prozess auch in Aufgaben verpacken und in der Leistungsbeurteilung den SchülerInnen wieder abverlangen. (Alles andere wäre „Feiertagsdidaktik“!)

**Beispiele:**

1. Definition der (lokalen) Maximum- bzw. Minimumstelle:

   als Prozess (vgl. KRONFELLNER 2003)

   bzw. als Prüfungsaufgabe:

a) Was versteht man unter einer (lokalen) Maximumstelle?
b) Beschreibe in Worten, warum …. keine zielführende Definition ist!
c) Beschreibe in Worten, wie man mit Hilfe der Differenzialrechnung (lokale) Extremstellen ermitteln kann!
d) Gibt es auch lokale Extremstellen, die man nicht mit Hilfe der Differenzialrechnung erhält?

2. Definition von $a^n$ als Prozess schrittweise für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, (ggf $\mathbb{C}$)

   bzw. als Prüfungsaufgabe:

   a) Wie ist $a^n$ definiert für $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ?
   b) Nenne Gründe für die Erweiterung des Potenzbegriffs!

3. Trigonometrische Funktionen analog: ($\alpha \in ]0°,90°[$, $\alpha=0°$, $\alpha=90°$, $\alpha \in [0°,360°[$ bzw. $\alpha \in [0, 2\pi[$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

4. Ein historisch-genetischer Zugang zum Funktionsbegriff
   (Vgl. KRONFELLNER 1998, S. 67ff)

U.v.a.m.

Es bleibt zu hoffen, dass PISA und Standards – ohne deren Wert in Abrede stellen zu wollen - nicht so viel Aufmerksamkeit der LehrerInnen beanspruchen werden, dass dann das schwächste Glied im Mathematikunterricht, die Begriffsbildung, wieder weiter aus dem Blickpunkt rückt.

## Literatur

BENDER, P.: Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen – ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht – erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen. In: Postel, H., Kirsch, A., Blum, W.: Mathematik Lehren und Lernen. Festschrift für Heinz Griesel, Schoedel, Hannover, 1991, S. 48 - 60

DÖRFLER, W.: Der Computer als kognitives Werkzeug und kognitives Medium. In: Dörfler, W., Peschek, W., Schneider, E., Wegenkittl, K. (Hrsg.): Computer – Mensch – Mathematik. Schriftenreihe Didaktik der Mathematik,, Band 21, Hölder-Pichler-Tempsky, Wien 1991

GRAY, E., TALL, D.: Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, The Journal for Research in Mathematics Education, 26 (2), 115-141.

HAAPASALO, L., KADIJEVICH, D.: Two Types of Mathematical Knowledge and Their Relation. JMD 21 (2000) H.2, 139 - 157

HIEBERT, J. and LEFEVRE, P., Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: An Introductory Analysis, in: Hiebert J. (ed.), Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics, Erlbaum, Hillsdale, New Jersey, 1986

vom HOFE, R.: Grundvorstellungen mathematischer Inhalte. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995

vom HOFE, R.: Probleme mit dem Grenzwert – genetische Begriffsbildung und geistige Hindernisse. JMD 19 (1998) H.4, S. 257 – 291

KRONFELLNER, M.: Historische Aspekte im Mathematikunterricht. Eine didaktische Analyse mit unterrichtsspezifischen Beispielen. Verlag Hölder-Pichler-Tempsky, Wien, 1998

KRONFELLNER, M.: Concept definition as a classroom activity. Proceedings 3rd Colloquium on the Didactics of Mathematics 2003, Rethymnon, Kreta, S. 242-248

MORENO, L.: Calculus: A historical and didactical approach. Vortrag, Quadrennial Meeting of the International Study Group for History and Pedagogy of MathematicsToronto, August 1992

PRZENIOSLO, M.: Cognitive structures connected with the calculus notions held by representatives of various intellect types. JMD 27 (2006), H.2, S. 113 – 139

SFARD A.: On the dual nature of mathematical conception: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. Educational Studies in Mathematics, 22, 1991

SIU, M.K.: "Algorithmic Mathematics" and "Dialectic Mathematics": The "Yin" and "Yang" in Mathematics Education. Proceedings of the International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level) (2nd, Hersonissos, Crete, Greece, July 1-6, 2002)

SKEMP, R.: The Psychology of Learning Mathematics. Penguin Books, Harmondsworth 1986

TALL, D.: Procepts. http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/procepts.html

VINNER, S.: The naive concept of definition in mathematics. Educational Studies in Mathematics, Vol 7, No 4, Dec 1976, S. 413 – 429

VOLLRATH, H. J.: Begriffsbildung als schöpferisches Tun im Mathematikunterricht. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 1987, Heft 3, S. 123–127