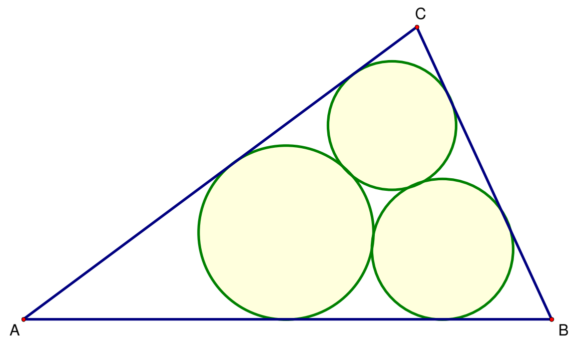
Ingmar LEHMANN, Berlin

Das Malfatti-Problem – Ein Thema in der Begabtenförderung

1. Die Malfatti-Story

1802 fand der italienische Mathematiker Malfatti (1731–1807) eine Lösung der folgenden Aufgabe, die er 1803 dann veröffentlichte:

> Wie lassen sich in ein gegebenes Dreieck drei sich nicht überlappende Kreise so einbetten, dass ihre Gesamtfläche möglichst groß ist?



Malfatti konstruierte die drei Kreise derart, dass sie einander und je zwei Seiten des Dreiecks berühren. Steiner (1796-1863) fand 1826 eine elegante Konstruktion. Seit 1929 bzw. 1967 weiß man, dass die sogenannten *Malfatti-Kreise* nicht die maximale Bedeckung eines Dreiecks liefern. Einen Beweis dafür lieferten 1992 Zalgaller und Los'. 2007 zeigte Guy schließlich, dass der *Leuchtturm-Satz* u.a. auch auf die Konstruktion der Malfatti-Kreise angewendet werden kann.

2. Konstruktion der Malfatti-Kreise

2.1 Konstruktion nach Malfatti (mit vorherigen Berechnungen)

Mit Hilfe des Satzes des Pythagoras und der Ähnlichkeit von Dreiecken erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösungen die Tangentenabschnitte an die Malfatti-Kreise sind. Damit lassen sich die Malfatti-Kreise (mit Zirkel und Lineal) konstruieren.

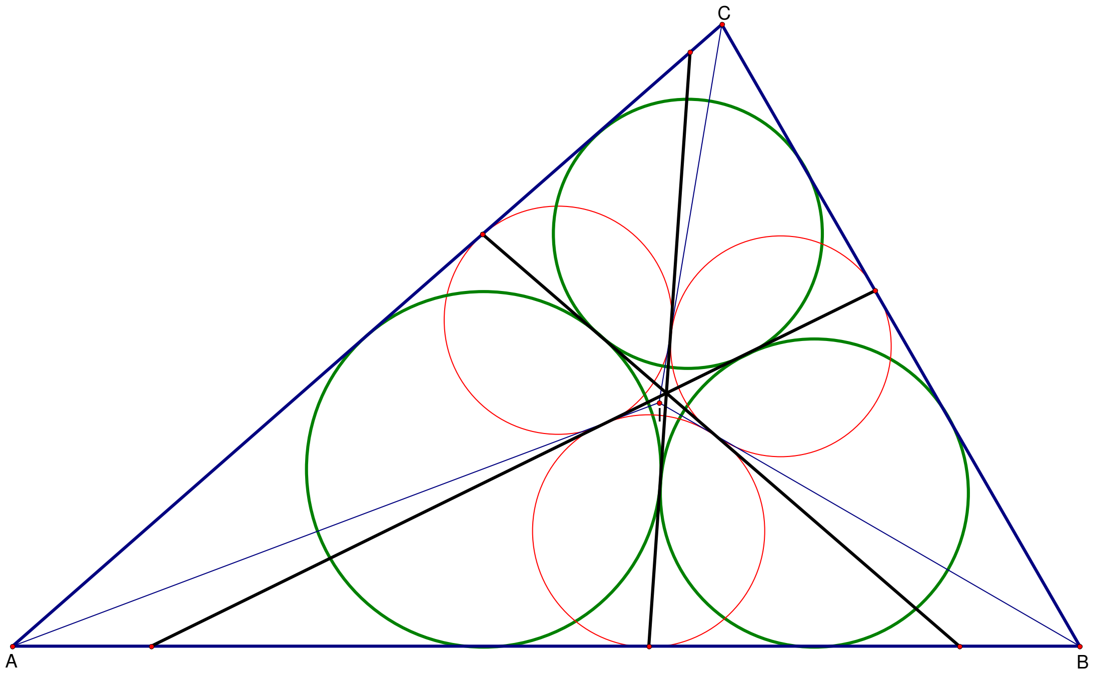
2.2 Konstruktion nach Steiner-Petersen (ohne vorherige Berechnungen)

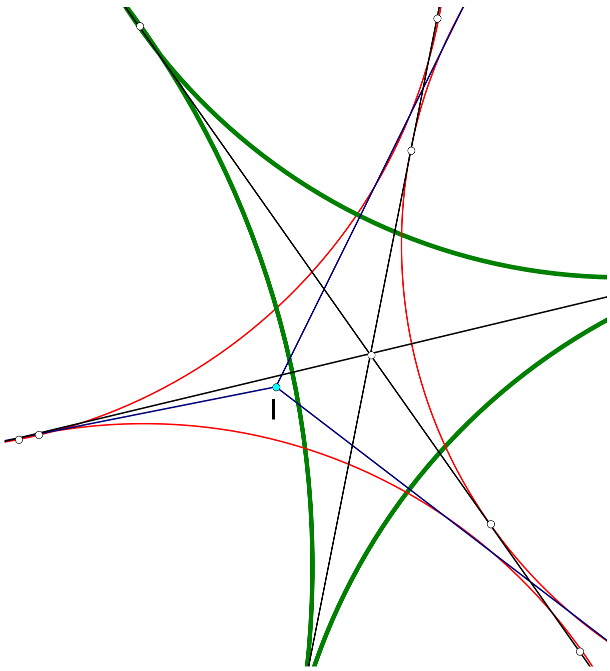
Petersen gelang 1879 – auf der Basis der Steiner-Konstruktion – eine elementargeometrische Lösung, die ich für die Schule zumindest für durchführbar halte. Diese Variante ist im Übrigen wenige Jahre später sogar schon in ein Schulbuch für Gymnasien, Realgymnasien und Realschulen aufgenommen worden.

Die entscheidende Stelle in der ganzen Konstruktion beruht auf einem Satz, den Steiner 1826 fand:

Jede der gemeinsamen Tangenten der Malfatti-Kreise berührt zugleich zwei der drei Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, wobei I der Mittelpunkt des Inkreises des Dreiecks ΔABC ist.

Zur Veranschaulichung hier dieser Zwischenschritt:





Die Inkreise berühren sich (im allgemeinen Fall) nicht; sie werden aber eben doch auch von den Tangenten der Malfatti-Kreise berührt, allerdings in unterschiedlichen Punkten.

Inkreise: dünn,

Malfatti-Kreise: fett

Vorüberlegungen (Analysis)

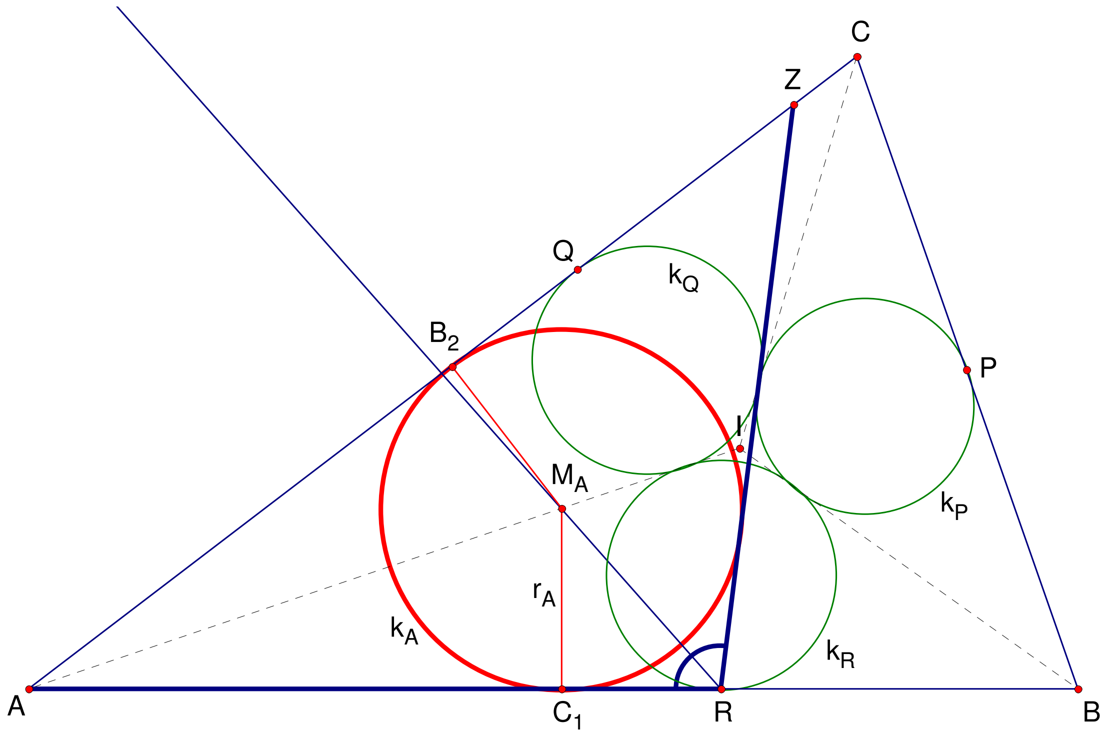
a) Die Mittelpunkte der Malfatti-Kreise müssen auf den Winkelhalbierenden der drei Innenwinkel liegen.

b) Um die Malfatti-Kreise konstruieren zu können, benötigen wir den Mittelpunkt I des Inkreises k (als Schnittpunkt der Winkelhalbierenden).

c) Die Eigenschaft, dass sich die drei Malfatti-Kreise paarweise berühren, erfordert zwischen je zwei dieser Kreise eine gemeinsame Tangente.
Könnte man diese Tangenten konstruieren, so erhielte man die Mittelpunkte der gesuchten Berührkreise durch die Konstruktion von weiteren Winkelhalbierenden.

d) Erstaunlicherweise erhält man diese Tangentenpunkte als Berührpunkte von drei Hilfskreisen mit den Dreiecksseiten. Diese Hilfskreise sind gerade die Inkreise der drei Teildreiecke ΔBCI, ΔCAI, ΔABI, die durch die Konstruktion der Winkelhalbierenden entstehen.

e) Die gesuchten Geraden sind nun gerade die Tangenten von den Berührpunkte an die Hilfskreise (Thaleskreis).



3. Die Malfatti-Kreise in einer mathematischen Arbeitsgemeinschaft

Ich habe das Malfatti-Problem in zwei Arbeitsgemeinschaften (Klassenstufen 10 und 11) im WS 2007/08 behandelt:
– Zirkel 10a: 14 Schüler (kein Mädchen dabei),
– Zirkel 11a: 6 Schülerinnen, 15 Schüler.

Zu den Malfatti-Kreisen

Mein ursprünglicher Versuch, ohne vorherige algebraische Betrachtungen auszukommen, ist kläglich gescheitert. Obwohl ich eine Reihe von Sätzen aus der Elementargeometrie wiederholt hatte, fanden die Schüler keinen Zugang. Auch Aufgaben zur „Japanischen Tempelgeometrie“ halfen letztlich wenig, sodass ich eine von mir geführte Konstruktion behandelt habe.

Zur Konstruktion nach Malfatti – mit vorherigen Berechnungen

Mit der Konstruktion selbst gab es keine Schwierigkeiten. Die Herleitung der Gleichungen für die Tangentenabschnitte lässt sich mühelos erarbeiten. Die Lösungen des Gleichungssystems habe ich ohne Beweis mitgeteilt. Meine Schüler waren irritiert, weil ein CAS sie hier nicht weiterbrachte.

Zur Konstruktion nach Steiner-Petersen – ohne vorherige Berechnungen

Die Konstruktion setzt zwar im Wesentlichen nur Schulstoff voraus, dennoch ist diese Konstruktion sehr schwierig. Allein die Analysis sprengt den Rahmen einer Schulstunde. Die Konstruktion selbst wurde dann mit Hilfe eines DGS durchgeführt. Die Freude, diese „riesige Konstruktion“ per Makro demonstrieren zu können, war allen ins Gesicht geschrieben.

Fazit und Schlussfolgerungen

Anstelle der Konstruktion können auch ausgewählte Elemente derselben behandelt werden. Auch Vorbetrachtungen zum Thema sind hilfreich.

- Das Malfatti-Problem wird für ein gleichseitiges Dreieck diskutiert.
- Das Malfatti-Problem wird für ein beliebiges Dreieck diskutiert, indem die Lösung von Zalgaller und Los’ vorgegeben wird.
- Für die Konstruktion der Malfatti-Kreise in einem beliebigen Dreieck empfehle ich Vorbetrachtungen oder vorbereitende Aufgaben.

In jedem Fall zeigt sich wieder einmal, wie ertragreich solche geometrischen Fragestellungen – wie das Malfatti-Problem – sein können.
Das betrifft sowohl die fachlichen Komponenten als auch die didaktischen – mit diesem Thema werden Schüler *und* Lehrer (heraus-)gefordert.
Aber derartige anspruchsvolle Themen, die motivieren und zudem ein „Durchhalten“, einen „langen Atem“ erfordern, sind rar! Die Reihe der Tätigkeiten, die sich zum Teil zwanglos ergeben, ist beeindruckend:

Entdecken, Vermuten, Experimentieren, Präzisieren, Verallgemeinern, Spezifizieren, Begründen, Widerlegen, Zeichnen, Konstruieren, Rechnen (Termumformen), Verbalisieren – das wollen wir doch erreichen.
Darüber hinaus genießen wir die Ästhetik der konstruierten Malfatti-Kreise!

Dass Schüler diese Konstruktion letztlich nicht vollständig begründen können, das ist ein Preis, den ich zu zahlen bereit bin!