

Matthias LUDWIG , PH Weingarten  
Binyan, XU, East China Normal University Shanghai

## **Mathematik auf der Ananas- Eine chinesisch-deutsche Studie zu den Modellierungskompetenzen.**

Während der letzten Jahre galt es als ein zentrales Ziel für den Mathematikunterricht die Fähigkeiten bei den Schülerinnen und Schülern so zu entwickeln, damit diese die Beziehung zwischen realer Welt und Mathematik erkennen und so die Rolle der Mathematik in der Welt sehen. (KMK, 2003; NCTM 2006). Solche Fähigkeiten sind stark mit den mathematischen Kompetenzen verbunden. In unserer Studie wurden die Modellierungskompetenzen von Schülern untersucht, welche sich mit einem authentischen Problem, dem Schälen einer Ananas, beschäftigten.

### **Theoretischer Rahmen**

Mathematische Modellierungskompetenzen werden u. a. definiert als die Fähigkeit relevante Fragen, Variablen, Beziehungen, und geeignete Annahmen in einer gegebenen realen Situation zu finden und diese dann in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, anschließend das resultierende mathematische Problem zu lösen und die Lösung wieder in Beziehung zur realen Welt bzw. zum Ausgangsproblem zu setzen. (Blum et al., 2007a, S.12) Hinzu kommt noch die Fähigkeit zu strukturieren, zu mathematisieren, zu interpretieren und zur Analyse und zum Vergleich von Modellen. (Blum 2002) In unserer Studie haben wir uns stark an den Modellierungskreislauf von Blum (2007b) angelehnt (siehe Abb. 1). Allerdings gehen wir in unserem Stufenmodell davon aus, dass die jeweiligen Modellierungsschritte aufeinander aufbauen und sukzessive durchlaufen werden. Dass dem nicht immer so sein muss, hat Boromeo-Ferri (2006) gezeigt. Es ist aber klar, dass jeder Schritt eine kognitive Hürde darstellt und je weiter man sich im Kreislauf befindet, desto näher ist man dem Ziel bzw. der Problemlösung. Wir haben deswegen folgende Niveaustufen bezogen auf das Ananas-Problem unterschieden.

Stufe 0: Die Realsituation wurde nicht erfasst. Es fällt schwer die Aufzeichnungen der Schüler mit der Aufgabenstellung in Verbindung zu bringen. Die Schüler haben also nicht den Einstieg in den Modellierungskreislauf gefunden. (Die Schüler haben z.B. nur etwas Zusammenhangloses auf Papier geschrieben oder ein Ananasbild gezeichnet.)

Stufe 1: Der Schüler hat die reale Situation erkannt und versucht diese zu strukturieren um ein mathematisches Modell zu finden, letztendlich mündet

dies aber in keiner weiterführenden Idee. (Die Schüler notierten z. B., dass man durch dieses Verfahren den Fleischverlust minimiert, und es wurden die schwarzen Punkten (Fruchststände der Ananas) versetzt aufgezeichnet.)

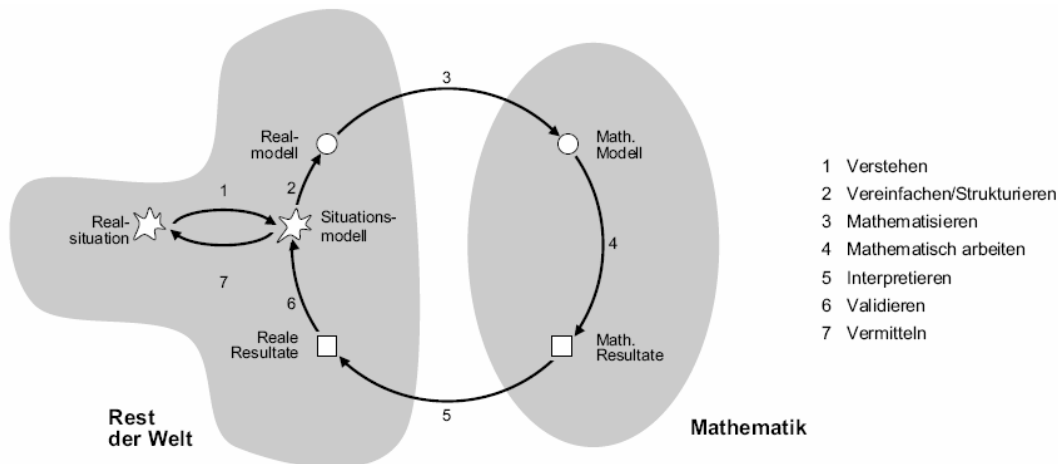


Abbildung 1: Der Modellierungskreislauf nach Blum (2007b)

Stufe 2: Die Schüler äußern eine sinnvolle Vermutung und sind in der Lage ein mathematisches Modell vorzuschlagen, aber dieses Modell wurde nicht konsequent mathematisiert. (Die Schüler verwenden z.B. den Zylinder als Modell. Die schwarzen Punkte wurden z. B. zu Vierecken verbunden.)

Stufe 3: Den Schülern gelingt es, das reale Modell in ein mathematisches Modell zu übersetzen und versuchen damit zu arbeiten, letztlich finden sie aber keine befriedigende Lösung, oder es liegt eine unsaubere Argumentation vor. (Die Schüler entwickeln gute Ideen z.B. Verwendung eines Punktemuster, Verbindung der Punkte zu einem Quadrat. Letztendlich scheitern die Schüler daran, dass sie nicht zeigen, dass die Diagonale der kürzeste Weg auf der Ananas ist.)

Stufe 4: Die Schüler schaffen es nun, das reale Modell in ein mathematisches Modell zu übersetzen und auch mathematisch zu behandeln, es fehlt aber noch die Rückkopplung mit der realen Welt. (Die Schüler führen alle Schritte wie Rechnungen, Beweise, richtig aus, aber dann wurde nicht auf Anfangsproblem zurückgeführt.)

Stufe 5: Die Schüler zeigen den vollständigen Modellierungsprozess bis hin zur Validierung und Diskussion der Ergebnisse (Sie zeigen z.B auch um wie viel Prozent der Spiralweg kürzer ist.)

## Die Studie

Die Studie wurde mit mehr als 1100 Schülerinnen und Schülern in den Jahrgangstufen 9 bis 11 an mehreren süddeutschen (n=7) und Shanghaier (n=3) Gymnasien durchgeführt. Wir gaben folgende reale Situation vor:



Jedes Jahr im April ist in Shanghai Ananassaison. Wenn man zu dieser Zeit eine Ananas in Shanghai kauft wird sie vom Obstverkäufer kunstvoll geschält. Nach dem Schälprozess sind auf der Ananas mehrere Spiralen zu sehen. Warum schält der Obstverkäufer die Ananas auf diese Art und Weise und nicht anders? Ist es besonders einfach? Oder verringert er damit den Verlust von Fruchtfleisch? Gibt es andere Gründe? Finde eine mathematische Begründung dafür.

Bevor die Schülerinnen und Schüler den Arbeitsauftrag bekamen, wurde ihnen ein 90 Sekunden langes Video in Landessprache gezeigt auf dem der komplette Schälprozess zu sehen ist. Am Ende des Videos wurde ihnen folgende Frage gestellt: Warum wird die Ananas so geschält? Finde eine mathematische Begründung dafür. Nun wurde das Video noch einmal gezeigt, so dass sich die Schüler die Situation diesmal aus einem mathematischen Blickwinkel betrachten konnten. Die Schülerinnen und Schüler hatten anschließend 25-35 Minuten Zeit sich Gedanken zur Situation zu machen und diese schriftlich auf einem Antwortbogen zu fixieren. Einige Ergebnisse wurden anschließend den Klassenkameraden präsentiert.

### **Ergebnisse und Diskussion**

Zunächst ist feststellbar, dass die durchschnittlich erreichten Levels in den einzelnen Jahrgangstufen bei den chinesischen und deutschen Schülern fast identisch sind (siehe. Abb. 2). Allerdings zeigt sich, dass die Art und Weise wie diese Durchschnittslevel zusammen kommen sehr unterschiedlich in Bezug auf Geschlecht und Nationalität ist. Die chinesischen Mädchen sind immer besser als die chinesischen Jungen und in Deutschland sind die Jungen nur in Jahrgangsstufe 11 besser als die Mädchen. Diese Unterschiede scheinen zwar deutlich, aber auf Grund der großen Standardabweichung nur für Klasse 9 in China signifikant ( $p < .01$ ); siehe auch Tabelle 1. Es zeigt sich, dass Level 5 in Deutschland nur von den Jungen und da auch nur in Klasse 11 erreicht wird. In China wird Level 5 fast nur in Klasse 11 erreicht, dort aber von beiden Geschlechtern gleichermaßen. Erfreulich ist, dass die Durchschnittswerte mit jeder Jahrgangsstufe besser werden, einen großen Sprung macht die Leistung in Klasse 11, besonders bei den deutschen Jungen und den chinesischen Mädchen ist hier ein hochsignifikanter Leistungszuwachs ( $p < .005$ ) zu beobachten. Die chinesischen Jungen steigern sich jedes Jahr höchstsignifikant ( $p < .005$ ). Bei den deutschen Mädchen fällt der Leistungszuwachs nicht so stark aus, da diese schon von einem höheren

Niveau in Klasse 9 starten. Einen nationalen Unterschied stellt man bei der Anzahl der Lösungen bis Level 2 fest. In China scheint Level 3 eine Hürde zu sein. Von dem Teil der Schüler welche Level 2 erreichen schaffen es nur 42 % auf Level 3 und weiter. In Deutschland können von den Schülern welche Level 2 erreichen immerhin 66% Level 3 und mehr erreichen. Hier scheint Level 4 die Hürde zu sein. Zur Erinnerung: Level 3 bedeutet, dass man im selbst gefundenen mathematischen Modell rechnen kann, Level 4 heißt dass man seine Rechnung auch noch begründen kann. Das bedeutet für die Schüler aus Shanghai, dass sie sich in ihrem eigenen Modell nicht zurecht finden, die deutschen Schüler haben dagegen Probleme das rechnerische Ergebnis zu begründen und zu interpretieren.

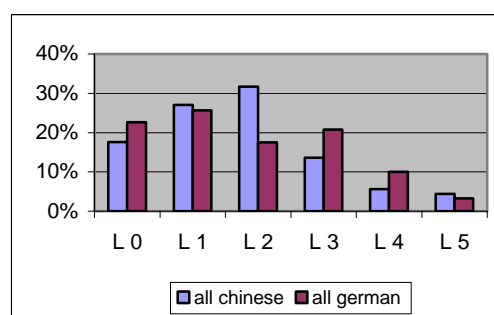
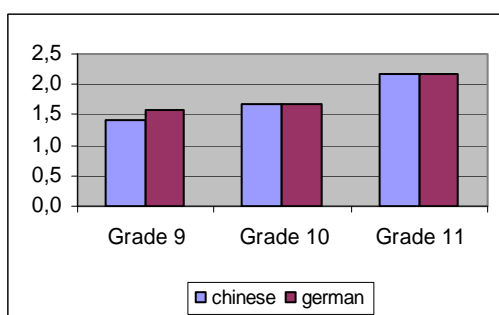


Abb. 2 Durchschnittlich erreichte Level    Abb. 3 Welche Stufen wurden erreicht

	Kl. 9			Kl. 10			Kl. 11		
	N	$\bar{x}$	SD	N	$\bar{x}$	SD	N	$\bar{x}$	SD
chin. w.	103	<b>1,63</b>	1,27	124	<b>1,71</b>	1,09	106	<b>2,30</b>	1,30
chin. m.	103	<b>1,18</b>	1,20	129	<b>1,64</b>	1,15	115	<b>2,07</b>	1,49
deutsch. w.	64	<b>1,78</b>	1,34	76	<b>1,83</b>	1,46	53	<b>2,09</b>	1,18
deutsch m.	81	<b>1,43</b>	1,45	71	<b>1,49</b>	1,37	83	<b>2,21</b>	1,50

Tabelle 1 Die Daten mit Mittelwert und Standardabweichung

## Literatur

Boromeo Ferri, R.(2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process, ZDM 2006 Vol.38 (2). S. 86-95

Blum, W. et al. (2007a). Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study. Springer.

Blum, W.(2007b). Modellierungsaufgaben im Mathematikunterricht.In: Humenberger et al (Hrsg.), Festschrift für HWH, Hildesheim: Franzbecker. S. 8-23.

Blum, W.et al. (2002). ICMI Study 14: Application and modelling in mathematics education – Discussion document. Educational Studies in Matematics 51(1-2), S. 149-171.

KMK (Kultusministerkonferenz) (2003). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den mittleren Bildungsschnitt.

NCTM (2006). Principles and Standards for School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics, Reston.