Friedhelm PADBERG, Bielefeld

Unser Stellenwertsystem - keineswegs leicht und problemlos!

1. Zur Entwicklung und Komplexität des dezimalen Stellenwertsystems

Um zu wissen, dass in 234,56 die Ziffer 3 drei Zehner sowie die Ziffer 6 sechs Hundertstel bedeutet, sind jeweils drei Informationen notwendig: Die Position der Ziffer zum Komma (links/rechts), ihr Stellenwert sowie ihr Zahlenwert müssen bekannt sein. Unsere Zahlschrift ist daher hoch abstrakt, aber gerade deswegen ausgesprochen leistungsfähig (vgl. Padberg 2008).

Das dezimale Stellenwertsystem für natürliche Zahlen bzw. seine Vorläufer sind erstmalig nachweisbar in Babylonien (2. Jahrtausend v. Chr., Basis allerdings 60, nicht 10), in Indien (6. Jahrhundert n. Chr.) und im arabischen Raum (Ende des 8. Jahrhunderts n. Chr.). Das dezimale Stellenwertsystem erreicht Europa um 1000 n. Chr. und setzt sich hier nach langem Kampf gegen die römische Zahlschrift erst gegen Mitte des 16. Jahrhunderts durch. Etwa um die gleiche Zeit (1585) publiziert S. Stevin den Band „De Thiende“ und erweitert so den Einsatzbereich des dezimalen Stellenwertsystems über den Bereich der natürlichen Zahlen hinaus. Während sich diese Erweiterung des dezimalen Stellenwertsystems im wissenschaftlichen Bereich rasch durchsetzt, erfolgt dies in der Schule und im täglichen Leben in Deutschland erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts.

2. Untersuchungsergebnisse

Forschungsergebnisse zum dezimalen Stellenwertsystem gibt es bislang nur sehr wenige. Bei unserer Untersuchung (Heckmann/Padberg), aus der die Dissertation von K. Heckmann (2006) hervorgegangen ist, handelt es sich um eine Längsschnittuntersuchung (Dauer: 1 Jahr) an Realschülern des 6. Schuljahres mit insgesamt knapp 500 schriftlichen Tests (Dauer: 1 Unterrichtsstunde) sowie 47 videodokumentierten Einzelinterviews.

Die Antworten auf die folgenden Aufgaben dokumentieren die Entwicklung der Kenntnisse und Fehlvorstellungen der untersuchten Realschüler bezüglich der Anordnung der Stellenwerte vom Beginn (vor der Bruchrechnung; T1) über die Mitte (nach der Bruchrechnung; T2) bis zum Ende des 6. Schuljahres (nach der Dezimalbruchrechnung; T3):

a)|b) Kreuze die a) Zehntel, b) Hundertstel an in 7, 654.

Ergebnisse (%, Auswahl)

	6 (r)	**5**	**n.b.**
T1	10	31	38
T2	10	58	21
T3	53	36	6

	5 (r)	**6**	**4**	**n.b.**
T1	12	28	9	41
T2	13	48	6	23
T3	55	35	3	6

Vor der Behandlung der Dezimalbruchrechnung (T3) sind die Stellenwerte Zehntel und Hundertstel den Schülern weitestgehend unbekannt, wie die geringe Quote richtiger (unter der Ratewahrscheinlichkeit!) sowie der hohe Anteil ausgelassener Aufgaben (nicht beantwortet: n.b.) klar aufzeigt. Der Rückgang bei n.b. von T1 zu T2 führt überraschenderweise nicht zu einer Erhöhung der richtigen Lösungen, sondern zu einer drastischen Steigerung der Hauptfehlerstrategie, nämlich die erste Stelle nach dem Komma bei Zahlen mit 3 Dezimalen als Hundertstel, die zweite Stelle als Zehntel (und die dritte Stelle als Einer/Eintel) aufzufassen. Die wachsende intuitive Erfahrung (auch durch die Bruchrechnung) von T1 zu T2 führt also nicht zu einer zunehmenden intuitiv-richtigen Interpretation, sondern zu einer sehr starken Fehlvorstellung, die sich auch nach (!) der systematischen Behandlung der Dezimalbruchrechnung auf einem sehr hohen Niveau hartnäckig hält und so die Quote richtiger Lösungen zu diesem Zeitpunkt sehr stark drückt.

Diese Hauptfehlvorstellung beruht darauf, dass viele Schüler auch die Zahl nach dem Komma als natürliche Zahl auffassen, im Beispiel also als siebenKOMMAsechshundertvierundfünfzig(stel), und daher die 6 folgerichtig als Hundertstel deuten. Zu dieser Komma-Trennt-Vorstellung (vgl. Padberg 2002), die auch in den Interviews öfter sichtbar wurde und die fatale Konsequenzen hat (keine feste Position der Stellenwerte, falsche Zusammenhänge zwischen den Stellenwerten, Fehler bei der Anordnung und bei den Rechenoperationen) werden die Schüler verführt durch die Aussprache von Größen im Alltag (3,45m: drei Meter fünfundvierzig), durch die entsprechende, problematische Bezeichnung von

Dezimalbrüchen (3,45: dreiKommafünfundvierzig) in den Medien sowie durch eine häufige Überbetonung der Analogien zu den natürlichen Zahlen bei der Erweiterung des Stellenwertsystems.

Neben dieser Hauptfehlvorstellung tritt die Fehlvorstellung „Komma als Symmetrieachse“ deutlich zurück, wie die beiden Ergebnistabellen klar zeigen.

Die Entwicklung der Kenntnisse und Fehlvorstellungen der untersuchten Realschüler bezüglich des Zusammenhanges zwischen den Stellenwerten kann den folgenden Aufgaben entnommen werden:

c) Wieviel Zehntel bilden einen Einer? d) Wieviel Zehntel einen Zehner? Ergebnisse (%, Auswahl)

	10 (r)	n.b.	1	100
T1	38	42	2	1
T2	53	26	5	4
T3	62	23	5	4

	100 (r)	n.b.	1	10
T1	26	42	7	7
T2	38	19	15	20
T3	32	27	26	5

Die Ergebnisse der den Aufgaben c) und d) vorgeschalteten Aufwärmaufgabe (Wieviel Zehner bilden einen Tausender?) überraschen (relativ geringe Quote richtiger Lösungen, relativ häufige Auslassungen (n.b.), Fehler) und zeigen, dass auch bzgl. der Behandlung des Stellenwertsystems im Bereich der natürlichen Zahlen noch deutlicher Forschungsbedarf besteht.

Die Lösungsquote bei Aufgabe c) ist schon relativ gering, aber möglicherweise dennoch überhöht, da eine Fehlerstrategie (vgl. d) ebenfalls zur richtigen Lösung 10 führt. Die hohe Quote an Auslassungen deutet auf eine große Unsicherheit hin, obwohl diese Aufgabe nach der Behandlung der Bruchrechnung eigentlich trivial sein müsste. Die Lösung 100 könnte insbesondere auch von Schülern mit der Fehlvorstellung „Komma als Symmetrieachse“ stammen.

Bei Aufgabe d) ist die sehr geringe Quote richtiger Lösungen (zu T3 abfallend!) ebenso wie die hohe Quote von Auslassungen (zu T3 deutlich ansteigend!) erschreckend. Bei T2 sind deutliche Effekte der Bruchrechnung erkennbar, die aber rasch wieder verpuffen (siehe T3!). Die

Hauptfehlerstrategie 1 beruht auf der Gleichsetzung von Zehnteln und Zehnern, also auf der Überbetonung der Analogie zu |N bzw. auf der KT-Strategie. „“Zehn“ kommt in der Aufgabenstellung – sogar zweimal – vor und wird vermutlich darum überraschend häufig als Lösung genannt.

Nicht nur bei der Frage nach dem Zusammenhang, sondern auch nach der Anordnung der Stellenwerte lässt sich beobachten, dass es trotz der niedrigen Mittelwerte durchaus auch Klassen gibt, in denen die Schüler diese Aufgaben erfolgreich lösen. Die Berücksichtigung der im folgenden Abschnitt genannten Konsequenzen für den Unterricht könnte daher bei deutlich mehr Lehrern zu höheren Erfolgen führen.

3. Konsequenzen

Die Erweiterung des Stellenwertsystems in Klasse 5|6 darf nicht – wie oft üblich – blitzschnell unter Zeitdruck (am Schuljahresende) erfolgen, sondern muss gründlich thematisiert werden. Eine parallele Behandlung der gemeinen Brüche und der Dezimalbrüche kann den Zeitdruck deutlich reduzieren und so zu einem vertieften Verständnis beitragen. Eine Betonung der Analogie zu |N ist eher schädlich, wie die Hauptfehlerstrategie deutlich zeigt, eine Betonung der zentralen Unterschiede ist dagegen wichtig und hilfreich. So lassen sich gut Widerstandsniveaus gegen gängige Fehlvorstellungen aufbauen. Eine Veranschaulichung der Stellenwerte etwa durch Zehnerblöcke auch bei der Erweiterung des Stellenwertsystems in Klasse 5|6 ist nach umfangreichen amerikanischen Untersuchungen sehr hilfreich. Um hierbei jedoch zu vermeiden, dass die Zehnerblöcke-Welt und die Rechen-Welt in den Köpfen der Schüler unverbunden nebeneinander existieren, müssen intermodale Transfers zwischen diesen Welten bewusst realisiert werden.

Literatur:

Kirsten Heckmann: Zum Dezimalbruchverständnis von Schülerinnen und Schülern. Theoretische Analyse und empirische Befunde. Berlin 2006.

Friedhelm Padberg: Didaktik der Bruchrechnung. Gemeine Brüche – Dezimalbrüche. 3. Auflage, Heidelberg 2002.

Friedhelm Padberg: Elementare Zahlentheorie. 3. Auflage, Heidelberg 2008.