

Elisabeth Rathgeb-Schnierer, Weingarten und Dieter Klautt, Ludwigsburg

Zahldarstellung und Zahlauffassung anhand von Zahlbildern im Zehnerfeld

Zahlbilder

Der Einsatz von Zahlbildern beim Einprägen von Zahlen, beim Aufbau von visuellen Vorstellungen sowie zur Unterstützung des Rechnens hat in der Mathematikdidaktik eine lange Tradition. Bereits in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts tauchten Zahlbilder in Verbindung mit völlig neuen Methoden zur Entwicklung des Zahlbegriffs auf: den so genannten Zahlbild- oder Anschauungsmethoden (vgl. MAIER 1990, S. 112). Diese Methoden intendierten die Abkehr von den bis dahin üblichen Zählmethoden und betonten die Relevanz einprägsamer Zahlbilder zur Förderung der Zahlbegriffsentwicklung. Welche bildlichen Zahldarstellungen sich zur Unterstützung des Lernprozesses am besten eignen, darüber disputierten die Anhänger der Anschauungsmethoden heftig. Eine Vielzahl von Zahlbilddarstellungen wurden entwickelt und ein Konsens zeichnete sich damals nicht ab, allerdings kristallisierten sich folgende Gestaltungskriterien (a.a.O., S. 113): Zahlbilder sollen leicht überschaubar und einprägsam sein. Einzelne Zahlbilder sollen voneinander klar zu unterscheiden sein, insbesondere die von benachbarten Zahlen. Zahlbilder sollen so strukturiert sein, dass sie eine Hilfe beim Rechnen darstellen. In jedem Zahlbild soll das vorangegangene erkannt werden. Das zuletzt genannte Kriterium geht auf KÜHNEL (1922, 29) zurück, der sich Anfang des 20. Jahrhunderts ebenfalls mit der Frage „Welche Zahlbilder benutzen wir nun?“ (ebd.) auseinandersetzte.

Heutzutage wird Zahlbildern im mathematischen Anfangsunterricht wieder eine zentrale Rolle zugeschrieben (vgl. GERSTER u. SCHULZ 2004, 344ff; KAUFMANN 2006, 167; SCHÜTTE 2004, 5ff) und auch heute variieren die Darstellungsformen: Als Zahlbilddarstellungen findet man beispielsweise Punktemuster mit Fünferstruktur und ohne vorgegebene Rahmung (vgl. Abb. 1 WITTMANN u. MÜLLER 1990, 23ff), Punktebilder im Zwanzigerfeld, die auf der Grundlage des Arbeitsmittels „Rechenschiffchen“ entwickelt wurden (Abb. 2; KAUFMANN u. WESSOLOWSKI 2006, 53) sowie Punktebilder im Zehnerfeld, die entweder linear oder en bloc angeordnet sind (GERSTER u. SCHULZ 2004, 344ff; SCHÜTTE 2004, 5ff).

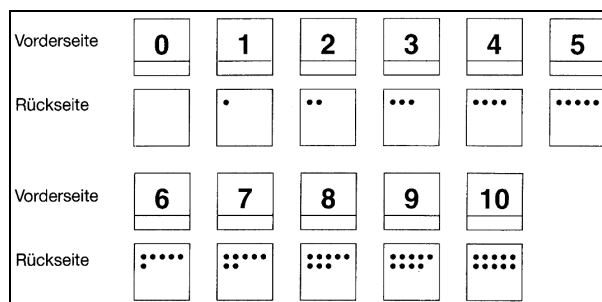


Abb. 1: Punktbilder zu den Zahlen 1 bis 10



Abb. 2: Darstellung der Zahl 7 im Zwanzigerfeld



Abb. 3: Zahl 7 im Gitterraster „Zehnerfeld“

Wie GERSTER und SCHULZ plädiert SCHÜTTE aufgrund der Übersichtlichkeit und Überschaubarkeit für die Zahlbilder im Gitterraster. Sie sieht dabei deutliche Vorteile in der en bloc-Anordnung der Punkte, da diese Strukturierung der Punkte unter anderem die Möglichkeit zur guten visuellen Gliederung bietet sowie das Erkennen von geraden und ungeraden Zahlen erleichtert (SCHÜTTE 2004, S. 5ff). Bei SCHÜTTE findet sich ein ganz neuer Aspekt im Umgang mit Zahlbildern: die Eigenstrukturierung durch die Kinder verbunden mit der Entwicklung einer gemeinsamen Darstellung im wechselseitigen Austausch (ebd.). In der aktuellen Diskussion werden die von den Anschauungsmethodikern entwickelte Kriterien (s.o.) um folgende erweitert: Zahlbilder sollten quasi-simultane Erfassung, das mentale Zerlegen und das Erkennen von Zahlbeziehungen ermöglichen.

Motivation und Forschungsfragen

Angeregt durch die möglichen Aktivitäten mit Zahlbildern im Zehnerfeld zum Aufbau von Zahl- und Operationsvorstellungen, haben wir uns im Rahmen der individuellen Förderung von Kindern mit Lernschwierigkeiten¹ für die Arbeit mit diesem Material entschieden (RATHGEB-SCHNIERER 2007, 103ff). Aus Erfahrungen und Beobachtungen, die wir innerhalb einer Gruppe von 12 Kindern mit den

¹ An der Beratungsstelle der Pädagogischen Hochschule Ludwigsburg.

Aktivitäten zur Eigenstrukturierung und Erkennung von Zahlbildern im Zehnerfeld machten, entwickelten sich verschiedene Forschungsfragen und das Bedürfnis, diesen an einer weitaus größeren Stichprobe nachzugehen: (1) Wie strukturieren Kinder Zahlbilder im Zehnerfeld? (2) Werden bestimmte Darstellungen beim Erstellen, beim Erkennen und beim mentalen Operieren bevorzugt? (3) Werden bei der Erstellung und Erkennung mathematische Grundstrukturen genutzt? (4) Wird das mentale Operieren von der Darstellung des Zahlbildes beeinflusst?

Aufgaben und Umsetzung mit Convertible PCs

In Anlehnung an die Forschungsfragen entwickelten wir auf der Grundlage von Zehnerfeldern drei verschiedene Aufgaben: eine zur Zahldarstellung, eine zur Zahlauffassung und eine zum mentalen Operieren. Um den Prozess der Aufgabenbearbeitung auch bei einer größeren Stichprobe untersuchen zu können, werden zur Umsetzung Convertible PCs (Stiftcomputer) eingesetzt. Diese ermöglichen auch Kindern, die den Umgang mit der Maus noch nicht beherrschen, direkte Eingaben auf der grafischen Benutzeroberfläche.

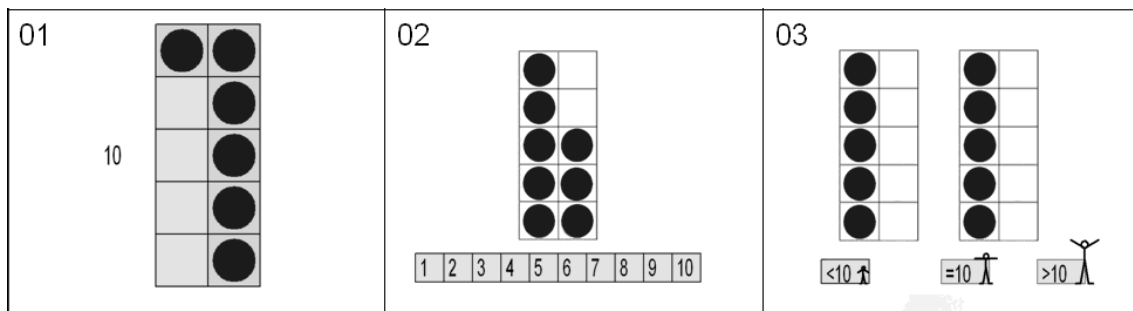


Abb. 4: Übersicht der drei Umgebungen

Die Aufgabenstellung zur Zahldarstellung beabsichtigt die Eigenstrukturierung von Zahlbildern im Zehnerfeld. Den Kindern wird ein leeres Zehnerfeld in Kombination mit einer Zahl präsentiert und sie haben die Aufgabe, ein entsprechendes Zahlbild zu gestalten. Jede Zahl von 2 bis 9 wird jeweils mit einem quer- und einem hochformatigen Zehnerfeld kombiniert (durch Wiederholungen insg. 35 Einzelaufgaben), wobei wir darauf achteten, keine direkten Nachbarzahlen nacheinander zu präsentieren. In den Protokollen der Bearbeitung werden folgende Daten gespeichert: Name, Aufgabe, Zeit, markierte Felder (Bsp. siehe Abb. 5). Bei der zweiten Aufgabenstellung interessiert uns der reversible Prozess: Ein komplettes Zahlbild und eine Zahlenleiste der Zahlen 2 bis 10 erscheinen auf dem Bildschirm und durch Antippen der entsprechenden Stelle in der Zahlenleiste erfolgt die Zuordnung der passenden Zahl zum

Zahlbild (insg. 35 Einzelaufgaben). Das mentale Zusammenfügen zweier Zahlbilder steht bei der dritten Aufgabenstellung im Vordergrund. Bei jeder Einzelaufgabe (insg. 35) tauchen zwei hochformatige Zehnerfelder mit verschiedenen Zahlbildern auf, die entweder beide linear oder en bloc dargestellt werden. Bei der Bearbeitung muss die Entscheidung für eine passende Kategorie getroffen werden: zusammen kleiner, größer oder gleich 10.

Name, Aufgabe, Zeit, Felder	Erklärung:	Feldnummern	
sonja ,6 h, 17, 1,2,3,4,5,6	einzel markiert	Quer: 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0	Hoch: 1 6 2 7 3 8 4 9 5 0
sonja ,6 h, 9 ,16,27,38	Paare markiert		
sonja ,6 q,10 ,123,678	2 Gesten: Würfelsechs		
sonja ,4 h,11, 1627 ,3498,	2 Würfelvierer markiert		
sonja ,9 h,12345 , 6789	5 und 4 in Reihe		

Abb. 5: Kommentierte Beispieldaten aus Umgebung 1

Pilotphase und erste Ergebnisse

Als erster Schritt wurden die Umgebungen in zwei verschiedenen Kontexten erprobt: In einem Mathecamp (14 Kinder), wo die Aufgaben an einer Station freiwillig bearbeitet werden konnten und mit 16 Kindern eines zweiten Schuljahrs im Rahmen des regulären Schulalltags. Es interessierten uns hierbei vorwiegend Aspekte wie Programmfehler, die Art der Aufgabeninstruktion, die Größe der „Arbeitsgruppe“, die Integration in den Schulalltag, die Akzeptanz der Computerumgebung sowie das Zurechtkommen der Kinder mit der Computerumgebung und den einzelnen Aufgabenstellungen. Als zweiter Schritt wurden die Umgebungen mit 75 Schülerinnen und Schülern des 2. Schuljahrs erprobt.

Im Moment liegen Ergebnisse der ersten Erprobungsphase vor, die hier aus Platzgründen leider nicht mehr dargestellt werden können. Weiteres siehe:

- <http://mathematik.ph-weingarten.de/~rathgeb>
- <http://www.ph-ludwigsburg.de/1559.html>

Literatur

Eine Liste der im Beitrag angeführten Literatur kann bei den Autoren unter folgenden Adressen angefordert werden:

rathgeb-schnierer@ph-weingarten.de

klaudt@ph-ludwigsburg.de