Christian RÜEDE, Universität Zürich

Was für Konzepte und Wissensbestände aktivieren Experten und Novizen bei Bruchtermen und Bruchtermgleichungen?

Werden im Unterricht über mehrere Wochen Bruchterme und Bruchtermgleichungen behandelt, entwickeln die Schüler und Schülerinnen Auffassungen davon, wie mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen umzugehen ist: Sie entwickeln erstens Vorstellungen von *formalisierbaren* (und damit auch explizierbaren) Regeln, wie zum Beispiel $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ oder $A \cdot B = 0 \Rightarrow A = 0 \vee B = 0$. Zweitens bauen sie ein Verständnis von *nicht formalisierbaren* Regeln (also von impliziten Normen) auf. Beispielsweise erfahren sie, dass je nach Gleichung eine andere Lösungsstrategie angemessen ist. Bei $\frac{1}{2x+1}+\frac{2x}{2x+1}=x^2$ wird anders vorgegangen als bei $\frac{x}{x-2}+\frac{2}{x+2}=1$. Ferner hängt die Bedeutsamkeit mathematischer Ausdrücke vom Kontext ab. Ist der Term $\frac{5x+15}{4x+12}$ zu vereinfachen, wird er anders behandelt als wenn er in der Gleichung $\frac{5x+15}{4x+12}=\frac{25}{4x+12}$ vorkommt.

Im Zentrum dieses Beitrags steht eine (noch nicht abgeschlossene) Untersuchung, die nach den Unterschieden des Verstehens bei Novizen – hier Schüler und Schülerinnen – und bei Experten – hier Mathematiklehrpersonen – fragt. Die aktuelle Stichprobe der Schüler und Schülerinnen (n=19) besteht aus einer Klasse der 9. Jahrgangsstufe eines Schweizer Gymnasiums. In dieser Klasse wurde vor Beginn der Untersuchung das Thema „Bruchtermgleichungen“ behandelt, wobei einerseits Wert auf die Auseinandersetzung mit unterschiedlichen Lösungswegen gelegt wurde und andererseits auf die Diskussion von möglichst verschiedenartigen Bruchtermgleichungen. Die aktuelle Stichprobe der Mathematiklehrpersonen umfasst Gymnasiallehrpersonen (n=4) mit einem fachwissenschaftlichen Studienabschluss in Mathematik.

1. Sortieren von Bruchtermgleichungen

Das Sortieren von Problemen ist eine bekannte Methode zur Erfassung von Expertisewissen (Chi et al. 1981). Für die vorliegende Untersuchung wurden zwanzig Kärtchen hergestellt und mit je einer Bruchtermgleichung beschriftet. So stehen auf den Kärtchen 1, 7 und 14 folgende Gleichungen:

1 $\frac{x^2+x-6}{(x-2)(x+3)}+\frac{5x+15}{4x+12}=x^2$

7 $$\frac{x^2+x-6}{(x+1)(x+5)}=\frac{x-6}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}$$

14 $$\frac{x^2-1}{x^2-2}+\frac{x^2-3}{x^2-2}-x=0$$

Alle Probanden mussten diese Kärtchen sortieren, und zwar nach ähnlichem Vorgehen, wenn sie die Gleichungen von Hand lösen würden. Während der Sortierung arbeiteten die Probanden ohne Zeitdruck und ohne etwas aufzuschreiben. Am Schluss mussten sie schriftlich festhalten, worin sich die Lösungsstrategien innerhalb jeder Gruppe ähneln.

Die Auswertung der so erhaltenen Daten basiert, wie bei solchen Sortiermethoden üblich, auf einer *Cluster-Analyse* der Sortierungen und auf einer *Kategorisierung* der Gruppenbeschreibungen. Es zeichnen sich folgende erste Resultate ab:

- Experten gruppieren sehr ähnlich. Differenzen ergeben sich nur in Bereichen, die ausgehandelt werden müssen, zum Beispiel bei Gleichungen wie $\frac{x}{2x+1}=\frac{2}{5}$. Hier kann man gleichnamig machen, die Lösung sofort erraten oder man kann gleiche Zähler anstreben und danach die Nenner gleich setzen. Die vorgenommene Kategorisierung der Gruppenbeschreibungen erlaubt es nicht, solche Feinheiten zu unterscheiden. Allerdings ermöglicht die eindeutige Homogenität innerhalb der Sortierung der vier Experten, von *der* Experten-Sortierung zu sprechen. Deshalb können die Sortierungen der Novizen mit einer Art Expertennorm verglichen werden.
- Experten sind in der Lage, die Folgen ihrer Umformungen im Kopf abzuschätzen. Zum Beispiel erkennen sie bei Gleichung 14 im Voraus, dass nach dem Zusammenfassen der Brüche gekürzt werden kann. Novizen hingegen tendieren dazu, die Gleichung 14 und eine Gleichung wie $\frac{4}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x}{x^2-1}$ in die gleiche Gruppe zu legen.
- In Chi et al. (1981) wird festgestellt, dass Aufgaben von Novizen nach Oberflächenstrukturen und von Experten nach Tiefenstrukturen sortiert werden. Spätere Studien verfeinern und differenzieren diese Beobachtung, z.B. Medin & Ross 1989. Auch bei der hier untersuchten Sortierung findet ein Wechselspiel von Oberfläche – das heißt Struktur – und Tiefe – also Lösungsstrategie – statt. So ist bei Gleichungen vom Typ $A\cdot B=0$ gerade ein angemessenes Erfassen der Termstruktur entscheidend. So scheinen unsere Experten die strukturellen Merkmale ausnahmslos angemessen für die Wahl einer

Lösungsstrategie zu nutzen, ganz im Gegensatz zu den Novizen, wo strukturelle Merkmale oftmals mit der Wahl der Lösungsstrategie konfundieren.

Nebst einer Kontrastrierung von Experten und Novizen liefert die Sortierungen auch Daten für eine pädagogische Diagnose der einzelnen Schüler und Schülerinnen und können so für den Unterricht genutzt werden. So müssen beim Sortieren Bezüge hergestellt werden bzw. abgeschätzt werden, welche Umstände (das heißt Gleichungen) welche Folgen (also Lösungsstrategien) erfordern. Die Sortierung in Gruppen verlangt ein Abgrenzen der einzelnen Gleichungen voneinander, also auch ein Abschätzen davon, was *nicht* angemessen ist – ein schönes Beispiel für negatives Wissen (Oser 2005).

Insgesamt umfasst die Art und Weise, wie jemand die Gleichungen sortiert, einen relevanten Teil der Auffassung von Bruchtermgleichungen. Weil die hier erfassten Mathematiklehrpersonen über die entsprechende fachliche Expertise verfügen, sind sie in der Lage, bei den Sortierungen der Schüler und Schülerinnen individuelle Qualitäten wie auch Defizite sofort zu erkennen, also zu diagnostizieren, wie ihre Schüler und Schülerinnen mit Bruchtermgleichungen umgehen.

2. Interviews

Die Daten, die beim Sortieren erhalten werden, erklären nicht, weshalb Novizen und Experten mit Bruchtermen und Bruchtermgleichungen anders umgehen. Aus diesem Grund wurden leitfaden-strukturierte Interviews durchgeführt mit dem Ziel, Vorgehensmerkmale beim Umformen zu beschreiben. Die Interviews waren in zwei Teile gegliedert: Im ersten Teil wurden den Probanden Bruchterme (z.B. $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$) vorgelegt und gefragt, wie diese zu vereinfachen seien. Im zweiten Teil wurden ihnen Bruchtermgleichungen (z.B. $\frac{20x^3+30x^2}{4x+6}=\frac{12x+18}{8x+12}$) vorgelegt, deren Terme strukturell ähnlich zu den Bruchtermen im ersten Teil des Interviews waren. Gefragt wurde nach erfolgversprechenden Umformungen.

Die Interviews werden nach der Methode der Didaktischen Rekonstruktion ausgewertet (Gropengiesser 2007). Zum jetzigen Zeitpunkt der Auswertung zeichnet sich ab, dass bei Bruchtermen ein „vertikaler Blick“ und bei Bruchtermgleichungen ein „horizontaler Blick“ dominiert: So schlagen Novizen wie auch Experten bei einem Term wie $\frac{6x^3+9x^2}{4x+6}$ vor zu kürzen. Hingegen tendieren dieselben Novizen (und auch ein Teil der Experten) bei einer Gleichung wie $\frac{20x^3 + 30x^2}{4x + 6} = \frac{12x + 18}{8x + 12}$ zum Gleichnamigmachen. Der Unterschied zwischen Novizen und Experten zeigt sich darin, dass sich die Experten selbstständig korrigieren. Sie machen im Kopf gleichnamig, multiplizieren mit dem gemeinsamen Nenner und erkennen, dass dadurch eine Gleichung dritten Grades entsteht. Als Konsequenz untersuchen sie die Gleichung genauer und schlagen daher das Kürzen der Gleichung vor.

3. Aus- und Seitenblick

In der hier vorgestellten Studie wird das Handeln von Personen im engen Bereich des Umformens von Bruchtermen und Bruchtermgleichungen untersucht. Ein solches Handeln wird geleitet durch Auffassungen von formalisierbaren wie auch nicht-formalisierbaren Regeln. Im ersten Fall, bei formalisierbaren Inhalten, kann das Verstehen durch Konstrukte wie etwa Grundvorstellungen (vom Hofe 1995) beschrieben werden. Der zweite Fall, das Verstehen nicht-formalisierbarer Inhalte, ist Gegenstand der hier vorgestellten Studie. Es geht hier um „Grundauffassungen" von Konzepten, die nicht formalisiert werden können, aber entscheidend sind für einen angemessenen Umgang mit Objekten wie z.B. Termen und Gleichungen.

Solche „Grundauffassungen" zeichnen sich durch folgende Attribute aus: Erstens leiten sie, *wie* mit den mathematischen Inhalten umzugehen ist – Grundvorstellungen beschreiben, *was* mit den mathematischen Inhalten gemeint ist. Zweitens entsprechen ihnen implizite Normen – Grundvorstellungen sind Vorstellungen von expliziten Normen. Drittens sind „Grundauffassungen" als singulär konzipiert (als Folge eines Konstruktivismus) – Grundvorstellungen sind als regulär konzipiert (als Folge eines Mentalismus). Viertens orientieren sie sich am Expertentum – Grundvorstellungen am Regulären.

Literatur

Chi, M.T.H., Feltovich, P.J. & Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science*, 5, 121–152.

Gropengiesser, H. (2007). Didaktische Rekonstruktion des Sehens. Beiträge zur Didaktischen Rekonstruktion, Bd. 1 (Nachdruck). Oldenburg.

Medin, D.L., Ross, B.H. (1989). The specific character of abstract thought: Categorization, problem solving, and induction. In Sternberg, R.J. (Ed.), *Advances in the psychology of human intelligence*. Vol. 5, 189–223. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Oser, F. (2005). *Lernen ist schmerzhaft – zur Theorie des Negativen Wissens und zur Praxis der Fehlerkultur.* Weinheim / Basel: Beltz Verlag

Vom Hofe, R. (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.